Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Олимпиада по прикладной математике и информатике для школьников
19 марта 2011 г.
8 класс

В задачах №№1, 2 разрешается пользоваться любой моделью алгоритма (программа на языке программирования, блок-схема или словесное описание). Помните, что **правильный алгоритм без обоснования его корректности засчитывается не полностью!**

1 (36,6). В тридцатишестиричной системе счисления 36 цифр — от 0 до 9 и от A до Z. Перевести (вручную) в шестиричную систему счисления следующие тридцатишестиричные числа:

4BY54P; 41554050441; BMK2011

Ответ: 41554050441; 40105050400050004040l; 15343202000101.

Решение. Достаточо заметить, что тридцатишестиричная и шестиричная системы счисления родственны настолько, что одна цифра первой в точности соответствует *двум* цифрам второй. Поэтому вместо полноценного перевода можно на скорую руку составить такую таблицу и обойтись заменой одной цифры из нижней строки двумя цифрами из верхней:

00	01	02	…	14	15	20	…	53	54	55
0	1	2	…	A	B	C	…	X	Y	Z

2 (Халва-халва). Кодовое слово защитили от подбора так: повторили это слово N раз, добавили N произвольных слов из различных книг, после чего расставили слова в случайном порядке.

Написать программу, находящую среди полученных слов кодовое, если известно, что оно содержалось как минимум в одной книге, а длина любого слова не превышает 20 символов. Условие: запрещено использование структур данных, размер которых растет с ростом N (например, нельзя запоминать все различные слова).

Ввод: N, $2 * N$ строк со словами (по одному в строке)

Вывод: кодовое слово

Решение. Идея решения — в том, что ключевых слов в тексте будет больше, чем остальных вместе взятых (N плюс не менее одного слова из книги, соответственно, не более $N-1$ остальных). Если каждому вхождению ключевого слова сопоставить 1, а каждому вхождению неключевого слова — -1, то сумма полученной последовательности будет положительной.

Назначим ключевым первое слово текста, а затем станем прибавлять к счётчику 1 всякий раз, когда встречается это слово, и вычитать 1, когда встречается другое слово. Если в какой-то момент сумма стала равна 0, это означает, что:

1. просмотренная часть текста содержит не более половины «правильных» ключевых слов (независимо от правильности первоначального выбора);
2. в оставшейся части текста, следовательно, «правильных» ключевых слов снова больше половины (и как минимум одно);

Поэтому когда сумма обнулится, алгоритм надо повторить: назначить ключевым очередное слово и продолжить складывать. Когда слова кончатся, счётчик останется ненулевым, а текущее ключевое слово и будет ответом.

```
N=input()                # Ввод числа слов
S,C="",0                 # Текущее ключевое слово и счётчик
for i in xrange(N):      # Цикл на N проходов
    s=raw_input()        # Ввод очередного слова
    if s==S:             # Если встретилось такое же слово,
        C=C+1            #   счётчик увеличивается
    else:                # Если встретилось другое слово,
        C=C-1            #   счётчик уменьшается
    if C<0:              # Если счётчик стал отрицательным,
        S,C=s,1          #   пора начинать новый отсчёт
print S
```

Замечание. В данном алгоритме используется одно хранилище слова и один счётчик. Заведение таблицы *со всеми возможными словами* не противоречит условию задачи, но крайне неоптимально.

3 (Ясновидение). Двое фокусников показывают такой фокус. Они просят любого желающего перетасовать стандартную колоду из 36 карт и выдать первому фокуснику 5 произвольных карт так, чтобы никто не видел, какие это карты. Затем первый, изучив полученные карты, выкладывает их на стол по одной слева направо (возможно, изменив порядок следования этих карт), причем ровно две из этих пяти карт он раскрывает, а остальные кладет рубашками вверх. После этого второй фокусник, немного подумав, сообщает аудитории, сколько карт каждой из четырех мастей среди оставшихся неоткрытыми 3 карт. Под бурные аплодисменты публика убеждается, что второй не ошибся. Фокусники могут повторить этот трюк сколько угодно раз, с неизменным успехом. Разгадайте секрет фокуса.

Решение. Заметим, что всего имеется 20 возможных ответов (т.е., вариантов распределить 3 нераскрытые карты по 4 мастям). Это 4 варианта, в которых все карты одной масти; 12 вариантов, в которых две карты одной масти, а третья — другой масти; и 4 варианта, в которых все три карты разных мастей. Занумеруем эти варианты числами от 1 до 20.

Получив 5 карт с раздачи, первый фокусник действует по следующему алгоритму. Он выбирает из своих карт две карты разного достоинства (это всегда можно сделать, т.к. число карт больше числа мастей: $5 > 4$). Пусть это будут карты достоинства a и b ($a < b$). Далее, он по мастям оставшихся трех карт определяет номер варианта (см. выше) — целое число n в диапазоне от 1 до 20. Если $n \leqslant 10$, то карту a он откроет раньше, чем b. Иначе (если $n \geqslant 11$) он, наоборот, карту a он откроет позже, чем b, причем в этом случае он уменьшает число n на 10.

Осталось расположить карты a и b среди 5 выкладываемых карт в некотором порядке. Это можно сделать 10 способами (число сочетаний из 5 по 2). Сочетания тоже можно занумеровать числами от 1 до 10. Нетрудно догадаться, что первый фокусник просто выбирает то сочетание, номер k которого равен текущему значению n. Вот и все.

Естественно, второй фокусник знает алгоритм, по которому действует его напарник. При этом он видит, в каких позициях среди 5 выкладываемых на стол карт находятся открываемые карты (и легко определяет номер k сочетания). Кроме того, он может сравнить открываемые карты c и d (c открылась раньше, чем d) и посчитать число

$$\Delta = \begin{cases} 0, & \text{если } c < d; \\ 1, & \text{если } c > d. \end{cases}$$

Наконец, искомый номер варианта второй фокусник вычисляет по нехитрой формуле $n = 10\Delta + k$, причем полученному значению n однозначно соответствует распределение нераскрытых трех карт по мастям, которое и торжественно озвучивается.

Заметим, что первый фокусник может даже не сам выбирать две карты из пяти для вскрытия, а попросить это сделать любого желающего из зала. Если же зритель случайно вытянет две карты одного достоинства, то меньшей можно считать ту карту, у которой меньше масть. Также отметим, что есть и другие алгоритмы „успешного ясновидения“.

4 (Совокупность). Пусть a, b, c — некоторые заданные числа, и пусть $f(a, b, c)$ — количество решений совокупности

$$\left[\begin{array}{lcl} ax^2 + bx + c & = & 0 \\ bx^2 + cx + a & = & 0 \\ cx^2 + ax + b & = & 0 \end{array}\right.$$

(решение совокупности уравнений — это число, являющееся корнем хотя бы одного уравнения этой совокупности).

Найти $\max f(a, b, c)$, где максимум берется по всем положительным числам a, b, c.

Ответ: 4.

Решение. Легко видеть, что указанная совокупность уравнений может иметь 4 корня (например, это будет при $a = 1, b = 6, c = 8$). Докажем, что больше 4 корней данная совокупность иметь не может.

Пусть a, b, c — произвольные положительные числа. Не умаляя общности, можно считать, что a — наименьшее из этих чисел, то есть $a \leqslant b$ и $a \leqslant c$. Тогда последнее уравнение совокупности не имеет решений, поскольку для его дискриминанта выполняется следующая цепочка соотношений: $D = a^2 - 4bc < a^2 - bc \leqslant a \cdot a - b \cdot c \leqslant 0$. Так как каждое из двух оставшихся квадратных уравнений имеет не более двух корней, получаем в итоге не более 4 корней.

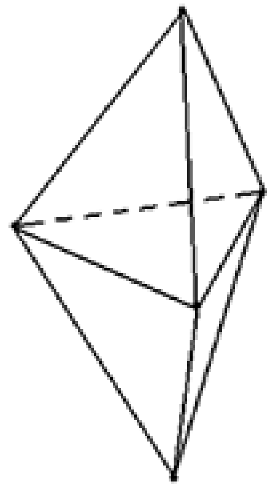
5 (Бипирамида). Во всех вершинах треугольной бипирамиды (см. рисунок) расставили различные натуральные числа от 1 до 5. Для каждого ребра посчитали

a) сумму

b) произведение

чисел, стоящих в его концах. Затем все числа, приписанные ребрам, просуммировали. Найти наименьшее и наибольшее из значений, которые при этом могли получиться.

Ответ: а) 51 и 57; b) 65 и 83.



Решение. Обозначим суммы, которые вычисляются в задаче в пунктах a) и b), через S_1 и S_2, соответственно.

Вершины треугольной бипирамиды, из которых выходит ровно 3 ребра, обозначим буквами A и B, а числа, приписанные им, обозначим через a и b, соответственно. Добавим к графу бипирамиды ребро AB. Легко видеть, что теперь каждая из пяти вершин соединяется ребрами со всеми оставшимися вершинами (такой граф обычно обозначают как K_5). Ясно, что для нового графа суммы и в пункте a) задачи, и в пункте b), не зависят от того, в каком порядке мы расставим числа $1, 2, \ldots, 5$ в вершинах. Вычислим их:

$\hat{S}_1 = 4(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 60;$

$\hat{S}_2 = 1(2 + 3 + 4 + 5) + 2(3 + 4 + 5) + 3(4 + 5) + 4 \cdot 5 = 85.$

В итоге,

$\min S_1 = \hat{S}_1 - \max(a + b) = 60 - (4 + 5) = 51;$

$\max S_1 = \hat{S}_1 - \min(a + b) = 60 - (1 + 2) = 57;$

$\min S_2 = \hat{S}_2 - \max(ab) = 85 - (4 \cdot 5) = 65;$

$\max S_2 = \hat{S}_2 - \min(ab) = 85 - (1 \cdot 2) = 83.$

6 (Степени).

Какое из двух чисел, 5^{1723} или 4^{2011}, больше? Ответ обосновать.

Ответ. Второе.

Решение. Легко видеть, что $125 = 5^3 < 2^7 = 128$. Следовательно, $5^6 < 4^7$, $5^{1723} = 5 \cdot (5^6)^{287} < 5 \cdot (4^7)^{287} < 16 \cdot (4^7)^{287} = 4^{2011}$.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Олимпиада по прикладной математике и информатике для школьников
19 марта 2011 г.
9 класс

В задачах №№1, 2 разрешается пользоваться любой моделью алгоритма (программа на языке программирования, блок-схема или словесное описание). Помните, что **правильный алгоритм без обоснования его корректности засчитывается не полностью!**

1 (Звучит логично). Логическое выражение задается в виде последовательного применения операций инверсии, конъюнкции, дизъюнкции и импликации. В первой строке указывается True или False, во всех последующих — код операции (INV, CON, DIS и IMP соответственно) с возможным параметром True или False, если тот необходим. Например,

6
True
CON False
IMP True
INV
DIS True
IMP False

соответствует $(\neg((True \wedge False) \to True) \vee True) \to False$
Написать программу, вычисляющую произвольное введенное выражение.

Ввод: N, True/False, $N-1$ строк вида "код True/False" или "код"
Вывод: True/False

Решение. В этой задаче нет никакого подвоха, достаточно просто считывать строку, разбивать её, если нужно, на слова и реализовывать соответствующую логическую операцию.

```
N=input()                       # Вводим размер выражения
V=input()                       # Водим первый параметр
for i in xrange(N-1):           # Цикл по оставшимся элементам
    S=raw_input()               # Введём очередную строку
```

```
    if S=="INV": V = not V      # Одноместная операция NOT
    else:                       # Двухместая операция
        o,stf=S.split()         # Разобъём строку на два слова
        tf=(stf=="True")        # Вычислим булевскую константу
        if o=="DIS":            # Соответствуюшая операция
            V=V or tf
        elif o=="CON":
            V=V and tf
        elif o=="IMP":          # Импликация выражается
            V=not V or tf       # через НЕ и ИЛИ
print V
```

2 (Запретные числа). В Верхней Курзюпии разрешено употреблять только натуральные числа, да и то не все, а прибавлять и вычитать можно только числа 100 и 1. В числе прочего, запрещено употреблять числа, большие 10000.

Написать программу, проверяющую, можно ли получить из числа A число B законным путем: начав с A прибавлять и вычитать только 100 или 1 таким образом, чтобы в результате операции не получалось запретное число, и в конце концов вышло B.

Ввод: $A < 10000$, $B < 10000$, N, N строк с запретными числами
Вывод: да/нет

Решение. Задача представляет собой обычный обход лабиринта 100×100, где запретное число k отражает непроходимую клетку с координатами $k\ MOD\ 100, k/100$. Границы лабиринта определяются неравенством $0 \geqslant x + y * 100 \geqslant 10000$ (что соответствует ленте, спирально намотанной на цилиндр периметром ~ 100).

Можно воспользоваться методом «волны»:

0 Пометить A

1. Пометить все клетки, достижимые за один шаг из клеток, помеченных на прошлом шаге. Для шага s это означает пометить все клетки, достижимые из A за s шагов.

2. Проверить, нет ли среди таких клеток B, и если нет, вернуться к предыдущей операции, а если есть — вывести «да» (или накопленное количество шагов).

```
import sys

L=[0]*10000                  # Задание списка нулей длиной 10000
A,B,N=input()                # Ввод Параметров
if A==B: print 0             # числа совпадают
for i in xrange(N):          # Ввод списка запрещённых чиел
    L[input()-1]=-1          #   и преобразование его в стены лабиринта

S,Next=0,[A]                 # Номер шага и числа для проверки на этом шаге
while Next:                  # Проверим числа на следующем шаге
    S=S+1
    Current,Next=Next,[]     # Перекладываем запасённые чсла, список обнуляем
    for c in Current:        # Просмотрим все запасённые числа
        for d in (c-1,c+1,c-100,c+100):         # Четыре прохода цикла
            if d == B:
                print S
                sys.exit()   # Выход найден, завершаем программу
            # Если d не запрещено и ещё не достигнуто
            if d>0 and d<=10000 and L[d-1]==0:
                L[d-1]=S     # d достижимо на S-м шаге
                Next.append(d)
print "Нет"
```

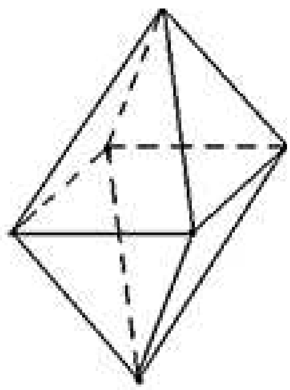
Алгоритм требует хранилища из 10000 ячеек памяти, но работает быстро, со скоростью, пропорциональной N.

3 (Ясновидение). Двое фокусников показывают такой фокус. Они просят любого желающего перетасовать стандартную колоду из 36 карт и выдать первому фокуснику 5 произвольных карт так, чтобы никто не видел, какие это карты. Затем первый, изучив полученные карты, выкладывает их на стол по одной слева направо (возможно, изменив порядок следования этих карт), причем ровно две из этих пяти карт он раскрывает, а остальные кладет рубашками вверх. После этого второй фокусник, немного подумав, сообщает аудитории, сколько карт каждой из четырех мастей среди оставшихся неоткрытыми 3 карт. Под бурные аплодисменты публика убеждается, что второй не ошибся. Фокусники могут повторить этот трюк сколько угодно раз, с неизменным успехом. Разгадайте секрет фокуса.

Решение. См. решение задачи 3 для 8 класса.

4 (Октаэдр). В вершинах октаэдра (см. рисунок) расставили различные натуральные числа от 1 до 6. Для каждого ребра посчитали произведение чисел, стоящих в его концах. Затем все числа, приписанные ребрам, просуммировали. Найти наименьшее и наибольшее из значений, которые при этом могли получиться.

Ответ: 131 и 147.



Решение. Обозначим числа, приписанные вершинам четырехугольника в основании октаэдра, через a, b, c, d, а остальным вершинам — e и f. Тогда сумма, которую надо оптимизировать, есть

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 6} (ij) - (ac + bd + ef) = 175 - (ac + bd + ef).$$

Осталось найти наибольшее и наименьшее значения выражения $S_2 = ac + bd + ef$ при условии, что числа a, b, c, d, e, f попарно различны и принадлежат множеству $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Заметим, что

$$2(ac + bd + ef) = (a + c)^2 + (b + d)^2 + (e + f)^2 - \sum_{i=1}^{6} i^2 =$$
$$= (a + c)^2 + (b + d)^2 + (e + f)^2 - 91.$$

Кроме того, из неравенства о среднем квадратическом и среднем арифметическом для трех положительных чисел имеем

$$\sqrt{\frac{(a + c)^2 + (b + d)^2 + (e + f)^2}{3}} \geqslant \frac{(a + c) + (b + d) + (e + f)}{3} = 7,$$

откуда легко получить, что $S_2 = ac + bd + ef \geqslant 28$. Значит, $S_1 = 175 - S_2 \leqslant 175 - 28 = 147$.

Нетрудно проверить, что наибольшее значение S_1 достигается при $a = 1, b = 2, c = 6, d = 5, e = 3, f = 4$.

Найдем наименьшее значение S_1. Из очевидного неравенства $(x - y)^2 \geqslant 0$ следует неравенство $2xy \leqslant x^2 + y^2$, которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда $x = y$. Если числа x и y целые, то $2xy$ и $x^2 + y^2$ тоже целые, причем в случае $x \neq y$ справедливо $2xy < x^2 + y^2$, что для целых левой и правой частей означает $2xy \leqslant x^2 + y^2 - 1$. Итак,

$$\begin{cases} 2ac \leqslant a^2 + c^2 - 1, \\ 2bd \leqslant b^2 + d^2 - 1, \\ 2ef \leqslant e^2 + f^2 - 1, \end{cases}$$

откуда

$$2S_2 = 2(ac + bd + ef) \leqslant \sum_{i=1}^{6} i^2 - 3 = 91 - 3 = 88.$$

Поэтому $S_1 = 175 - S_2 \geqslant 175 - 44 = 131$. Минимум S_1 достигается при $a = 1, b = 3, c = 2, d = 4, e = 5, f = 6$.

5 (Четырехугольник). В выпуклом $ABCD$ точка E — середина стороны AB, а точка F — середина стороны CD. Площадь треугольника BEC в пять раз больше площади треугольника AED, а площадь треугольника BFC в пять раз больше площади треугольника ADF. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна S. Найти площадь четырехугольника $ABCF$. Может ли четырехугольник $ABCD$ быть не трапецией и не параллелограммом?

Ответ: $\frac{11S}{12}$, не может.

Решение. Введем следующие обозначения: h_1, h_2, h_3 — длины перпендикуляров, опущенных на прямую AB из точек D, F, C (соответственно); H_1, H_2, H_3 — длины перпендикуляров, опущенных на прямую CD из точек A, E, B (соответственно); $S_{\triangle DAF} = a_1$, $S_{\triangle FEC} = a_2$, $S_{\triangle AFE} = b_1$, $S_{\triangle ECB} = b_2$, $S_{\triangle DEF} = c_1$, $S_{\triangle FBC} = c_2$, $S_{\triangle ADE} = d_1$, $S_{\triangle EFB} = d_2$. Рассматривая трапецию, ограниченную прямыми AB и CD и перпендикулярами, опущенными на прямую AB из точек D, C, по теореме о средней линии трапеции получаем, что $h_2 = (h_1 + h_3)/2$. Аналогично $H_2 = (H_1 + H_3)/2$. Используя последние равенства и условия задачи, имеем (из формулы площади треугольника как полупроизведения длины стороны на длину проведенного к этой стороне основания):

$$5 = \frac{b_2}{d_1} = \frac{h_3}{h_1} \;\Rightarrow\; h_3 = 5h_1,\; h_2 = 3h_1,$$

откуда

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{h_3}{h_2} = \frac{5}{3},\; \frac{d_2}{d_1} = \frac{h_2}{h_1} = 3.$$

Кроме того, $b_1 = d_2$. Значит,

$$b_1 = d_2 = 3d_1,\; b_2 = \frac{5}{3}b_1 = 5d_1. \qquad (*)$$

Аналогично можно получить, что

$$a_2 = c_1 = 3a_1,\; c_2 = \frac{5}{3}c_1 = 5a_1. \qquad (**)$$

Но $S = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 = c_1 + d_1 + c_2 + d_2$. Подставляя в эти равенства соотношения $(*)$, $(**)$, получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = a_1 + 3d_1 + 3a_1 + 5d_1, \\ S = 3a_1 + d_1 + 5a_1 + 3d_1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S = 4a_1 + 8d_1, \\ S = 8a_1 + 4d_1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = d_1, \\ S = 12a_1, \end{array} \right.$$

откуда окончательно получим:

$$\frac{S_{ABCF}}{S_{ABCD}} = \frac{S - a_1}{S} = \frac{11S}{12}.$$

Ответим теперь на вопрос, может ли четырехугольник $ABCD$ быть не трапецией и не параллелограммом. Так как $a_1 = d_1$, то $S_{\triangle DAF} = S_{\triangle ADE}$, но у этих треугольников общее основание AD, и, следовательно, у них равны проведенные к AD высоты, откуда вытекает, что $AD||EF$. Но из равенства $a_1 = d_1$ с учетом равенств $(*)$, $(**)$ следует, что $S_{\triangle FBC}c_2 = b_2 = S_{\triangle ECB}$, а, значит, по аналогии $BC||EF$. Таким образом, $AD||EF$, и четырехугольник $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

6 („Зри в корень!“). Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{2x^2 - 12x + 26} + \sqrt{2x^2 - 18x + 45}.$$

Ответ: $\sqrt{29}$.

Решение. Исходное выражение можно преобразовать к виду

$$\sqrt{(x-1)^2 + ((x+2)-7)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + ((x+2)-5)^2} = D.$$

Теперь видно, что значение выражения D представляет собой сумму длин отрезков AM и BM, где точка A имеет на декартовой плоскости координаты $(1;\,7)$, B — $(6;\,5)$, а точка M имеет координаты $(x;\,x+2)$, так что она лежит на прямой l, заданной уравнением $y = x + 2$. Замечая, что точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l, приходим к выводу, что минимум выражения D соответствует случаю, когда M есть точка пересечения прямых AB и l, и по формуле расстояния между точками находим: $\min D = |AB| = \sqrt{(6-1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{29}$.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Олимпиада по прикладной математике и информатике для школьников
19 марта 2011 г.
10 класс

В задачах №№1, 2 разрешается пользоваться любой моделью алгоритма (программа на языке программирования, блок-схема или словесное описание). Помните, что **правильный алгоритм без обоснования его корректности засчитывается не полностью!**

1 (Халва-халва).

Кодовое слово защитили от подбора так: повторили это слово N раз, добавили N произвольных слов из различных книг, после чего расставили слова в случайном порядке.

Определить среди полученных слов кодовое, если известно, что оно содержалось как минимум в одной книге, а длина любого слова не превышает 20 символов. Условие: запрещено использование структур данных, размер которых растет с ростом N (например, запоминать все различные слова).

Ввод: N, $2 * N$ строк со словами (по одному в строке)
Вывод: кодовое слово

Решение. См. решение задачи 2 для 8 класса.

2 (Запретные числа).

В Верхней Курзюпии разрешено употреблять только натуральные числа, да и то не все, а прибавлять и вычитать можно только числа 100 и 1. В числе прочего, запрещено употреблять числа, большие 10000.

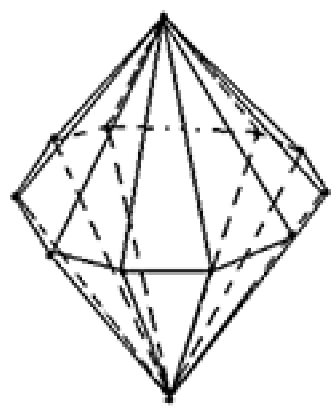
Определить, за сколько законных арифметических операций можно быстрее всего получить из числа A число B: начав с A прибавлять и вычитать только 100 или 1 таким образом, чтобы в результате операции не получалось запретное число, и в конце концов вышло B.

Ввод: $A < 10000$, $B < 10000$, N, N строк с запретными числами
Вывод: количество операций

Решение. См. решение задачи 3 для 9 класса.

3 (Многомногогранник).

Две одинаковых правильных 2011-угольных пирамиды имеют общее основание (2011-угольник) и вместе образуют многогранник с 2013 вершинами (см. рисунок). Выбрали 2013 последовательных целых чисел и расставили их все в вершинах этого многогранника. Далее каждому ребру приписали сумму значений, расположенных на его концах. Затем все числа, приписанные ребрам, просуммировали. Найти разность наибольшего и наименьшего значений (экстремумы берутся по всем расстановкам выбранных чисел в вершинах многогранника), которые при этом могли получиться.



Ответ: 8072154 ($= 2007 \cdot 4022$).

Решение. Заметим, что при увеличении всех чисел, стоящих в вершинах многогранника, на одно и то же число (возможно, отрицательное) и максимум, и минимум указанной в условии суммы S увеличиваются на одно и то же число, поэтому разность между ними остается неизменной. Поэтому можно считать, что расставляются натуральные числа от 1 до 2013.

Обозначим числа, стоящие в вершинах двух правильных 2011-угольных пирамид, через a и b. В сумме S слагаемые a и b встречаются 2011 раз, а остальные числа — по 4 раза. Значит,

$$S = 4\sum_{i=1}^{2011} i + 2007(a+b),$$

откуда $\max S - \min S = 2007(\max(a+b) - \min(a+b)) = 2007((2013+2012) - (1+2)) = 2007 \cdot 4022 = 8072154$.

4 (Уравнение).

Найти все тройки натуральных чисел (x, y, z), удовлетворяющих уравнению

$$4^x + 5^y = 9^z.$$

Ответ: (1, 1, 1).

Решение. $4^x+5^y=9^z \Leftrightarrow (3^z-2^x)(3^z+2^x)=5^y \Leftrightarrow$ Существуют такие неотрицательные целые k, l ($k\le l$, $k+l=y$), что

$$\begin{cases} 3^z-2^x=5^k, \\ 3^z+2^x=5^l, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^l+5^k=2\cdot 3^z, \\ 5^l-5^k=2^{x+1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^k(5^{l-k}+1)=2\cdot 3^z, \\ 5^k(5^{l-k}-1)=2^{x+1}, \end{cases}$$

откуда $k=0$, вследствие чего приходим к системе

$$\begin{cases} 5^l+1=2\cdot 3^z, \\ 5^l-1=2^{x+1}, \end{cases} \qquad (***)$$

откуда $3^z-2^x=1$. Решим это уравнение в натуральных числах. При $x=1$ получаем $z=1$, и исходному уравнению удовлетворяет тройка $(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)$. При $x\ge 2$ выражение 2^x кратно 4, значит, 3^z при делении на 4 дает остаток 1, то есть z — четное, $z=2t$ ($t\in N$). Имеем: $(3^t-1)(3^t+1)=2^x$, то есть существуют такие неотрицательные целые a, b ($a<b$, $a+b=x$), что

$$\begin{cases} 3^t-1=2^a, \\ 3^t+1=2^b, \end{cases}$$

откуда $2^b-2^a=2$, $2^a(2^{b-a}-1)=2$. Значит, $a\in\{0,\ 1\}$. Подставляя эти значения, видим, что $a=1$, $b=2$, $t=1$, $z=2$, $x=3$, что не может давать натуральных решений исходного уравнения.

5 (Почти пополам).

Окружность с центром в вершине правильного 5-угольника и с радиусом, равным стороне этого пятиугольника, делит его на две части. Определите, площадь какой части пятиугольника больше — той, что лежит вне круга, или той, что внутри.

Ответ: той, что внутри.

Решение. Ясно, что отношение площадей не зависит от длины стороны правильного 5-угольника, поэтому будем для удобства считать, что она равна единице.

Обозначим через S площадь правильного 5-угольника, а через S_1 — площадь сектора, высекаемого от этого 5-угольника окружностью. Докажем, что $2S_1>S$ (это равносильно тому, что $S_1>S-S_1$, т.е. площадь части пятиугольника, лежащей внутри круга, больше площади части, лежащей вне круга).

Т.к. сектор имеет угол $\alpha=\frac{\pi(5-2)}{5}=\frac{3\pi}{5}$, то $2S_1=1^2\alpha=\frac{3\pi}{5}$.

С другой стороны, площадь правильного 5-угольника со стороной 1 равна $S = pr = \frac{5}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$.

Поэтому $2S_1 > S \Longleftrightarrow \frac{12\pi}{25} > \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} \Longleftrightarrow \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5} > \left(\frac{25}{12\pi}\right)^2$.

Вычислим $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}$.

По формуле приведения, $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5}$. Применяя известные формулы двойного и тройного угла, имеем $2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5}(3 - 4(1 - \cos^2\frac{\pi}{5}))$, откуда, разделив на положительный $\sin\frac{\pi}{5}$, получим квадратное уравнение относительно $a = \cos\frac{\pi}{5}$:

$4a^2 - 2a - 1 = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (т.к. $a > 0$).

Итак, $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, значит, $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5} = \frac{5}{5+2\sqrt{5}}$.

Для завершения доказательства, что $2S_1 > S$, осталось убедиться в справедливости следующей цепочки неравенств и равенств:

$$\pi^2 > 3,1^2 = 9,61 > 5 + 2 \cdot 2,3 > 5 + 2\sqrt{5}.$$

Заметим, что задача решается намного легче (без вычисления тригонометрических функций угла $\frac{\pi}{5}$) с помощью неравенства $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, справедливого для любого $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Последнее же неравенство можно нетрудно доказать с помощью производной, отталкиваясь от более известного соотношения $\operatorname{tg} x > x$, верного при тех же значениях x.

6 (Пара радикалов).

Найти минимальное значение выражения $\sqrt{5x^2 + 22x + 37} + \sqrt{5x^2 + 20}$.

Ответ: $\sqrt{89}$.

Решение. Исходное выражение можно преобразовать к виду

$$\sqrt{(x-1)^2 + ((2-2x)-8)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (2-2x)^2} = D.$$

Теперь видно, что значение выражения D представляет собой сумму длин отрезков AM и BM, где точка A имеет на декартовой плоскости координаты $(1; 8)$, B — $(-4; 0)$, а точка M имеет координаты $(x; 2-2x)$, так что она лежит на прямой l, заданной уравнением $y = 2 - 2x$. Замечая, что точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l, приходим к выводу, что минимум выражения D соответствует случаю, когда M есть точка пересечения прямых AB и l, и по формуле расстояния между точками находим: $\min D = |AB| = \sqrt{(1-(-4))^2 + (8-0)^2} = \sqrt{89}$.