Решения задач заочного тура Олимпиады факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова по прикладной математике и информатике для школьников, 24 марта 2012 года, 8 класс

Задача 1. „Сколько можно?“

Какое наибольшее число неравенств может выполняться одновременно:

$$x^2 + y^2 < z^2, \qquad y^2 + z^2 < x^2, \qquad z^2 + x^2 < y^2?$$

Ответ: 1.

Решение. Будем, не ограничивая общности, считать, что $|x| \leq |y| \leq |z|$ (x, y, z входят в систему симметрично). Тогда неравенства $z^2 + x^2 < y^2$, $y^2 + z^2 < x^2$ выполняться не могут. Одно же неравенство из трех выполняться может (например, при $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$).

Задача 2. „Разности квадратов“.

Укажите количество всех таких натуральных чисел, меньших 100, каждое из которых нельзя представить в виде разности квадратов целых чисел.

Ответ: 25.

Решение. Заметим, что любое нечетное натуральное число можно представить в виде разности квадратов целых чисел:

$$2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2.$$

Аналогично, любое натуральное число, делящееся нацело на 4, можно представить в виде разности квадратов целых чисел:

$$4k + 4 = (k + 2)^2 - k^2.$$

Докажем, что никакое натуральное число вида $4k + 2$, то есть число, дающее остаток 2 при делении на 4, не представимо в виде разности квадратов целых чисел. Пусть это не так, — тогда $4k + 2 = a^2 - b^2$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, причем легко видеть, что a и b — одинаковой четности, и имеет место один из случаев:

1) $a = 2l + 1$, $b = 2m + 1$,

2) $a = 2l$, $b = 2m$.

В первом случае имеем:

$$4k+2=a^2-b^2=(2l+1)^2-(2m+1)^2=4\cdot(l^2-m^2+l-m)$$

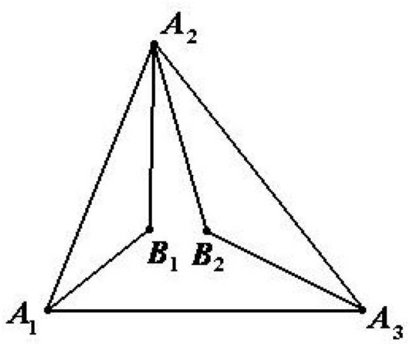
— противоречие, так как начало цепочки равенств не делится нацело на 4, а конец — делится. Во втором случае имеем:

$$4k+2=a^2-b^2=(2l)^2-(2m)^2=4\cdot(l^2-m^2),$$

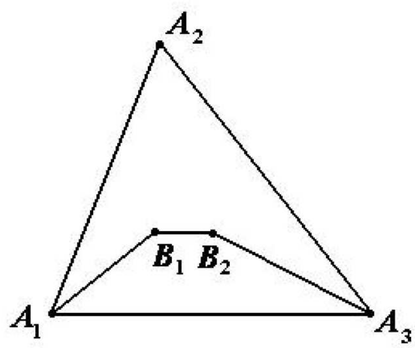
— и тут получаем аналогичное противоречие. Значит, никакое натуральное число вида $4k+2$ не представимо в виде разности квадратов целых чисел. Во множестве чисел $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 100\}$ имеется ровно 25 чисел такого вида: $2=4\cdot 0+2$, $6=4\cdot 1+2$, $10=4\cdot 2+2$, $\ldots$, $98=4\cdot 24+2$.

Задача 3. „Сумма углов“.

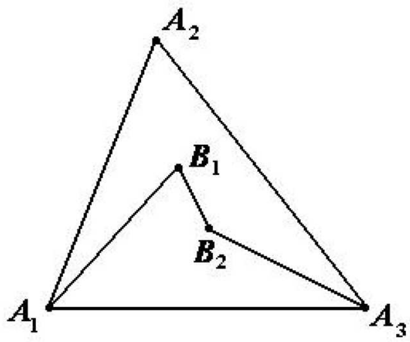
Зная, что сумма внутренних углов треугольника всегда равна 180°, укажите количество всех таких различных натуральных чисел, каждое из которых может быть суммой (в градусах) внутренних углов невыпуклого пятиугольника.



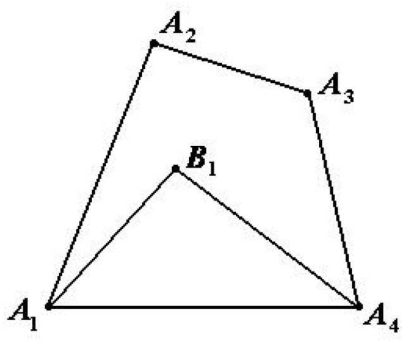
а)



б)



в)



г)

Ответ: 1.

Решение. Ясно, что для пяти вершин невыпуклого пятиугольника возможны два случая:

1) либо три из них (A_1, A_2, A_3) являются вершинами треугольника, внутри которого лежат две другие (B_1, B_2),

2) либо четыре из них (A_1, A_2, A_3, A_4) являются вершинами треугольника, внутри которого лежит пятая (B_1).

Нетрудно видеть, что для случая 1) возможны три принципиально различных способа расположения вершин (с точностью до их переименования), изображенных на рисунках а) (с пятиугольником $A_1B_1A_2B_2A_3$), б) (с пятиугольником $A_1A_2A_3B_2B_1$), в) (с пятиугольником $A_1A_2A_3B_2B_1$), а для случая 2) возможен один принципиальный способ расположения вершин (с точностью до их переименования), изображенный на рисунке г) (с пятиугольником $A_1A_2A_3A_4B_1$). Рисунки б)–в) отличаются тем, что на рисунке б) внутренний угол $\angle B_1B_2A_3$ больше $180°$, а на рисунке в) — меньше $180°$.

Вычислим сумму S внутренних углов пятиугольника для каждого из рисунков:

а) $S = 180° - (\angle B_1A_1A_2 + \angle B_1A_2A_1) - (\angle B_2A_2A_3 + \angle B_2A_3A_2) + (360° -$

$$-\angle A_1B_1A_2) + (360° - \angle A_2B_2A_3) = 900° - (\angle B_1A_1A_2 + \angle B_1A_2A_1 +$$

$$+\angle A_1B_1A_2) - (\angle B_2A_2A_3 + \angle B_2A_3A_2 + \angle A_2B_2A_3) = 900° - 180° - 180° = 540°.$$

б)-в) $S = 180° - (\angle B_1A_1A_3 + \angle B_2A_3A_1) + (360° - \angle A_1B_1B_2) + (360° -$

$$-\angle B_1B_2A_3) = 900° - (\angle B_1A_1A_3 + \angle B_2A_3A_1 + \angle A_1B_1B_2 + \angle B_1B_2A_3) =$$

$$= 900° - (\angle B_1A_1B_2 + \angle B_2A_1A_3 + \angle B_2A_3A_1 + \angle A_1B_1B_2 + \angle B_1B_2A_1 +$$

$$+\angle A_1B_2A_3) = 900° - (\angle B_1A_1B_2 + \angle A_1B_1B_2 + \angle B_1B_2A_1) - (\angle B_2A_1A_3 +$$

$$+\angle B_2A_3A_1 + \angle A_1B_2A_3) = 900° - 180° - 180° = 540°.$$

г) S есть сумма углов треугольников $\triangle A_1A_2B_1$, $\triangle A_2A_3B_1$, $\triangle A_3A_4B_1$, то есть $S = 3 \cdot 180° = 540°$.

Задача 4. „О корнях“.

Обозначим через $D(a)$ число различных корней уравнения

$$x^3 + (a^2 - 2)x^2 + (1 - 2a^2)x + a^2 = 0.$$

Пусть B — минимальное, а C — максимальное по всем действительным a значение $D(a)$. Найти $B^2 + C^2$.

Ответ: 8.

Решение. Нетрудно установить (например, методом неопределенных коэффициентов), что

$$x^3 + (a^2 - 2)x^2 + (1 - 2a^2)x + a^2 = (x - 1)^2(x + a^2),$$

значит, при любом a имеется в точности 2 различных корня уравнения: $x_1 = 1$ (положительный корень) и $x_2 = -a^2$ (неположительный корень). Таким образом, имеем: $B = C = 2$, $B^2 + C^2 = 8$.

Задача 5. „Не в амперах ли измеряется сила тока?“

Какое из приведенных названий *не* является названием языка программирования?

Правильные ответы помечены «▷».

Вариант 1.

1. Objective C
2. Object Pascal
3. Python 2.7
4. Visual Basic
5. ▷ Visial Studio — линейка продуктов компании Майкрософт, включающих интегрированную среду разработки программного обеспечения и ряд других инструментальных средств.

Вариант 2.

1. Python 2.7
2. Modula 3
3. Visual Basic
4. Object Pascal

5. ▷ Turbo Pascal 7.0 — интегрированная среда разработки программного обеспечения.

Вариант 3.

1. Visual Basic
2. C++
3. Objective C
4. ▷ C++ Builder — программный продукт, инструмент быстрой разработки приложений, интегрированная среда программирования.
5. Python 2.7

Вариант 4.

1. Python 2.7
2. Visual Basic
3. Objective C
4. Object Pascal
5. ▷ Delphi 2010 — интегрированная среда разработки программного обеспечения.

Вариант 5.

1. Python 2.7
2. Objective C
3. Visual Basic
4. C++
5. ▷ Notepad++ — текстовый редактор.

Задача 6. „Рационализатор“.

Коля написал программу, которая вводит числа a, b и выводит на экран их полусумму (все вводимые и выводимые числа — с плавающей точкой). Учитель информатики говорит, что программа правильная. Учитель математики говорит, что полученный ответ — *всегда* рациональное число (то есть отношение целого числа и натурального), что не может быть верно для произвольных чисел a и b. Возможно ли, что оба учителя правы?

Ответ. Да.

Пояснение. Учитель математики прав, подразумевая, что в программу невозможно ввести (как и вывести) нерациональное число, не представимое конечной десятичной дробью (более того, не всякое рациональное число можно ввести как число с плавающей точкой). Прав и учитель информатики, если алгоритм вычисления полусуммы чисел реализован корректно (в частности, корректно выполняются приближенные вычисления для чисел с плавающей точкой).

Задача 7. „Цифровой детектив“.

(В задаче требуется указать все правильные ответы)

В некоторой базе данных хранятся файлы одного формата со различными (случайными) изображениями двух типов размеров: 1000×1000 и 250×250. Размер каждого файла с изображением 1000×1000 оказался в точности равен сумме размеров 16 любых файлов с изображениями 250×250. Что можно утверждать наверняка про эти файлы?

Правильные ответы помечены «$\triangleright$».

- Это файлы с индексированными цветами и одинаковой палитрой
- $\triangleright$ Это файлы с неиндексированными цветами
- $\triangleright$ Глубина цветности у всех файлов одинакова
- $\triangleright$ Это файлы в формате без сжатия изображения
- Метаинформация занимает в каждом их них одинаковый ненулевой объем
- $\triangleright$ Это файлы, не содержащие метаинформации

- Это файлы, полученные с цифрового фотоаппарата в двух различных режимах съемки
- Большие изображения разрезали на 16 частей и получили малые

Пояснение. Если файлы содержат палитру (индексированные цвета) или метаинформацию, то их размер вычисляется как сумма размера изображения и размера дополнительных данных. Следовательно, при совпадении суммарного размера изображений размеры одного большого и нескольких маленьких файлов будут отличаться. Что касается файлов со сжатием содержимого, то, поскольку коэффициент сжатия зависит от содержимого, совпадение всех размеров файлов с изображениями одного размера очень маловероятно. Если глубина цветности разная, совпадение по размерам всех файлов, содержащих изображения одного размера, в условиях задачи практически исключено. Цифровые камеры всегда оставляют метаинформацию (например, ориентацию и дату). И, разумеется, совпадение суммарного размера бывает далеко не только в случае, когда малые картинки получены делением большой (да и в этом случае не всегда — из-за метаинформации, например).

Задача 8. „Неожиданный результат“.

Программа сложила N целых неотрицательных чисел. Результат оказался меньше нуля. Может ли такое быть (в ответе указано *необходимое*, но не обязательно достаточное условие)?

Правильные ответы помечены «$\triangleright$».

Вариант 1.

1. Да, если N больше 2
2. Безусловно да
3. $\triangleright$ Да, если компилятор не проверяет переполнение
4. Нет, если числа достаточно большие (больше определенного целого числа)
5. Безусловно нет
6. Да, если все числа одинаковые

Вариант 2.

1. Да, если все числа одинаковые
2. Нет, если числа достаточно большие (больше определенного целого числа)
3. Безусловно нет
4. $\triangleright$ Да, если целые числа в программе хранятся в ячейках фиксированного размера
5. Безусловно да
6. Да, если N больше 2

Вариант 3.

1. Безусловно нет
2. Безусловно да
3. Да, если все числа одинаковые
4. Нет, если числа достаточно большие (больше определенного целого числа)
5. $\triangleright$ Да, если среднее арифметическое всех чисел достаточно большое (больше определенного числа)
6. Да, если N больше 2

Пояснение. Речь в задаче идет о целочисленном переполнении, возникающем, когда результат в двоичном представлении занимает на один бит больше, и этот бит — знаковый (очевидно, что среднее арифметическое всех N слагаемых такой суммы будет больше, чем `MAXINT`, деленный на N). Чтобы такое могло случиться, необходимо, чтобы язык программирования не использовал „длинную арифметику“ (в языке Python, например, можно работать с целыми любого размера) и в нем такое переполнение не считалось бы ошибкой (так дело обстоит в языке Си и более низкоуровневых языках типа ассемблеров).

Решения задач заочного тура Олимпиады факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова по прикладной математике и информатике для школьников, 24 марта 2012 года, 9-10 классы

Задача 1. „Блины на сковородке“.

Найти наименьший радиус круга, в который можно без наложения поместить 4 круга радиусов 1, 1, 2 и 3, соответственно.

Ответ: 5.

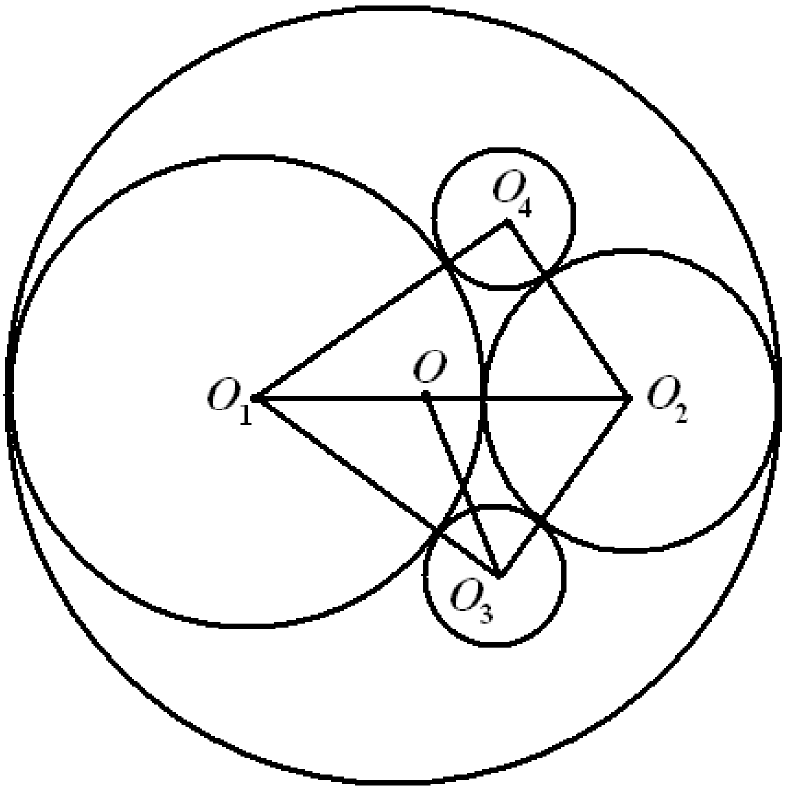


Рисунок к задаче „Блины на сковородке“.

Решение. Поскольку круги Ω_1 и Ω_2 радиусов 3 и 2 (соответственно) должны размещаться в круге Ω искомого радиуса без наложения, то, проведя через центры кругов Ω_1 и Ω_2 прямую l, заметим, что она высечет из каждого круга его диаметр, и максимальное расстояние между точками кругов Ω_1 и Ω_2, лежащими на этой прямой, будет не меньше суммы длин диаметров Ω_1 и Ω_2. Значит, искомый радиус R круга Ω удовлетворяет неравенству $R \geq 5$.

Покажем, что $R = 5$. Расположим круги Ω_1 и Ω_2, а также круги Ω_3 и Ω_4 радиуса 1 так, чтобы круги Ω_1, Ω_2 и Ω_3 касались бы попарно внешним образом, и круги Ω_1, Ω_2 и Ω_4 касались бы попарно внешним образом (см. рисунок). Пусть O_i — центр круга Ω_i ($i \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$). Пусть центр O круга Ω лежит на середине отрезка, высекаемого из прямой $l = (O_1O_2)$ кругами Ω_1 и Ω_2. Значит, O лежит на отрезке O_1O_2 длины 5, и при этом $|O_1O| = 2$, $|O_2O| = 3$. Заметим, что $|O_1O_3| = |O_1O_4| = 4$, $|O_2O_3| = |O_2O_4| = 3$. Достаточно доказать, что $|OO_3| \leq 4 = 5 - 1$ (тогда круг Ω_1 будет полностью лежать внутри круга Ω; с кругом Ω_4 дело будет обстоять аналогично). По теореме косинусов в треугольнике $\triangle O_1O_2O_3$ имеем:

$$\cos \angle O_2O_1O_3 = \frac{|O_1O_2|^2 + |O_1O_3|^2 - |O_2O_3|^2}{2 \cdot |O_1O_2| \cdot |O_1O_3|} = \frac{25 + 16 - 9}{2 \cdot 5 \cdot 4} = 0,8.$$

По теореме косинусов в треугольнике $\triangle O_1OO_3$ имеем:

$$|OO_3|^2 = |O_1O|^2 + |O_1O_3|^2 - 2 \cdot |O_1O| \cdot |O_1O_3| \cdot \cos \angle OO_1O_3 =$$
$$= 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 0,8 = 20 - 12,8 = 7,2 < 4^2,$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. „Фрагменты куба“.

Имеется куб с ребром 1. Через всевозможные пары параллельных ребер куба, не лежащих в одной грани, проводятся плоскости (сечения), делящие куб на части. Найти наименьшее целое число, большее или равное сумме площадей полных поверхностей получившихся частей.

Ответ: 23.

Решение. Сечений куба плоскостями имеется шесть. Каждое из них представляет собой диагональный прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{2}$ и входит в площадь поверхности фрагментов суммарно ровно 2 раза. Еще есть шесть граней куба, каждая из которых войдет в площадь поверхности фрагментов суммарно ровно один раз. Получаем, что искомая сумма площадей полных поверхностей есть $12\sqrt{2} + 6 \in (22; 23)$.

Задача 3. „Сколько можно?“

Какое наибольшее число неравенств может выполняться одновременно:

$$x^2 + y^2 < 2yz, \qquad y^2 + z^2 < 2zx, \qquad z^2 + x^2 < 2xy?$$

Ответ: 2.

Решение. Сложив все три неравенства, получим их следствие:

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2<0,$$

что невозможно. Значит, все три неравенства не могут выполняться одновременно. Два неравенства из трех выполняться могут: положим, например, $x=2$, $y=1$, $z=3$, тогда $x^2+y^2=4+1=5<6=2yz$, $y^2+z^2=1+9=10<12=2zx$.

Задача 4. „О корнях“.

Пусть B — минимальное, а C — максимальное по всем действительным значениям параметра a число различных корней уравнения

$$x^3+(1-a)x^2-(a^2+2a)x+(a^3+a^2)=0.$$

Найти B^2+C^2.

Ответ: 5.

Решение. Нетрудно установить (например, методом неопределенных коэффициентов), что

$$x^3+(1-a)x^2-(a^2+2a)x+(a^3+a^2)=(x-a)^2(x+a+1),$$

значит, при любом $a\neq-0,5$ имеется в точности 2 различных корня уравнения: $x_1=a$ и $x_2=-a-1$, а при $a=-0,5$ имеется в один корень уравнения: $x=-0,5$. Таким образом, имеем: $B=1$, $C=2$, $B^2+C^2=5$.

Задача 5. „Не в амперах ли измеряется сила тока?“

Какое из приведенных названий *не* является названием языка программирования?

Правильные ответы помечены «$\triangleright$».

Вариант 1.

1. Objective C

2. Object Pascal
3. Python 2.7
4. Visual Basic
5. ▷ Visial Studio — линейка продуктов компании Майкрософт, включающих интегрированную среду разработки программного обеспечения и ряд других инструментальных средств.

Вариант 2.

1. Python 2.7
2. Modula 3
3. Visual Basic
4. Object Pascal
5. ▷ Turbo Pascal 7.0 — интегрированная среда разработки программного обеспечения.

Вариант 3.

1. Visual Basic
2. C++
3. Objective C
4. ▷ C++ Builder — программный продукт, инструмент быстрой разработки приложений, интегрированная среда программирования.
5. Python 2.7

Вариант 4.

1. Python 2.7
2. Visual Basic
3. Objective C
4. Object Pascal
5. ▷ Delphi 2010 — интегрированная среда разработки программного обеспечения.

Вариант 5.

1. Python 2.7
2. Objective C
3. Visual Basic
4. C++
5. ▷ Notepad++ — текстовый редактор.

Задача 5. „Рационализатор“.

Петя написал программу, которая вводит коэффициенты a, b и c, и выводит на экран корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (все вводимые и выводимые числа — с плавающей точкой). Учитель информатики говорит, что программа правильная. Учитель математики говорит, что полученный ответ — *всегда* рациональное число, что не может быть верно. Возможно ли, что оба учителя правы?

Ответ. Да.

Пояснение. Учитель математики прав, подразумевая, что в программу невозможно ввести (как и вывести) иррациональное число, не представимое конечной десятичной дробью (более того, не всякое рациональное число можно ввести как число с плавающей точкой). Прав и учитель информатики, если алгоритм вычисления корней квадратного уравнения реализован корректно (в частности, корректно выполняются приближенные вычисления для чисел с плавающей точкой).

Задача 7. „Цифровой детектив“.

(В задаче требуется указать все правильные ответы)

В некоторой базе данных хранятся файлы одного формата со различными (случайными) изображениями двух типов размеров: 1000×1000 и 250×250. Размер каждого файла с изображением 1000×1000 оказался в точности равен сумме размеров 16 любых файлов с изображениями 250×250. Что можно утверждать наверняка про эти файлы?

Правильные ответы помечены «$\triangleright$».

- Это файлы с индексированными цветами и одинаковой палитрой
- $\triangleright$ Это файлы с неиндексированными цветами
- $\triangleright$ Глубина цветности у всех файлов одинакова
- $\triangleright$ Это файлы в формате без сжатия изображения
- Метаинформация занимает в каждом их них одинаковый ненулевой объем
- $\triangleright$ Это файлы, не содержащие метаинформации
- Это файлы, полученные с цифрового фотоаппарата в двух различных режимах съемки
- Большие изображения разрезали на 16 частей и получили малые

Пояснение. Если файлы содержат палитру (индексированные цвета) или метаинформацию, то их размер вычисляется как сумма размера изображения и размера дополнительных данных. Следовательно, при совпадении суммарного размера изображений размеры одного большого и нескольких маленьких файлов будут отличаться. Что касается файлов со сжатием содержимого, то, поскольку коэффициент сжатия зависит от содержимого, совпадение всех размеров файлов с изображениями одного размера очень маловерояно. Если глубина цветности разная, совпадение по размерам всех файлов, содержащих изображения одного размера, в условиях задачи практически исключено. Цифровые камеры всегда оставляют метаинформацию (например, ориентацию и дату). И, разумеется, совпадение суммарного размера бывает далеко не только в случае, когда малые картинки получены делением большой (да и в этом случае не всегда — из-за метаинформации, например).

Задача 8. „Неожиданный результат“.

Программа сложила N целых неотрицательных чисел. Результат оказался меньше нуля. Может ли такое быть (в ответе указано *необходимое*, но не обязательно достаточное условие)?

Правильные ответы помечены «$\triangleright$».

Вариант 1.

1. Да, если N больше 2
2. Безусловно да
3. $\triangleright$ Да, если компилятор не проверяет переполнение
4. Нет, если числа достаточно большие (больше определенного целого числа)
5. Безусловно нет
6. Да, если все числа одинаковые

Вариант 2.

1. Да, если все числа одинаковые
2. Нет, если числа достаточно большие (больше определенного целого числа)
3. Безусловно нет
4. $\triangleright$ Да, если целые числа в программе хранятся в ячейках фиксированного размера
5. Безусловно да
6. Да, если N больше 2

Вариант 3.

1. Безусловно нет
2. Безусловно да
3. Да, если все числа одинаковые
4. Нет, если числа достаточно большие (больше определенного целого числа)
5. ▷ Да, если среднее арифметическое всех чисел достаточно большое (больше определенного числа)
6. Да, если N больше 2

Пояснение. Речь в задаче идет о целочисленном переполнении, возникающем, когда результат в двоичном представлении занимает на один бит больше, и этот бит — знаковый (очевидно, что среднее арифметическое всех N слагаемых такой суммы будет больше, чем `MAXINT`, деленный на N). Чтобы такое могло случиться, необходимо, чтобы язык программирования не использовал „длинную арифметику“ (в языке Python, например, можно работать с целыми любого размера) и в нем такое переполнение не считалось бы ошибкой (так дело обстоит в языке Си и более низкоуровневых языках типа ассемблеров).