Олимпиада школьников
по прикладной математике и информатике
факультета ВМК МГУ
имени М. В. Ломоносова

Заочный тур

2 марта 2013 года

8 класс

Правильный вариант ответа выделяется символом $\triangleright$. В задачах 1–3 решения не приводятся.

Задача 1. Опасные заблуждения

Вариант 1. На острове Чунга-Чанга всегда считалось, что слоны умные, но медлительные. Оказалось, что это поверье не соответствует действительности! Чему же теперь верить?

- Что слоны стремительные, но не умные
- Что слоны не медлительные
- Что слоны глуповатые, но не медлительные
- $\triangleright$ Что слоны не умные или не медлительные

Вариант 2. На острове Вицлипуцли всегда считалось, что акулы вкусны, но редки. Оказалось, что это поверье не соответствует действительности! Чему же теперь верить?

- Что акулы многочисленны
- Что акулы невкусны
- Что акулы многочисленны, но невкусны
- $\triangleright$ Что акулы невкусны или не редки

Вариант 3. На острове Невезения всегда считалось, что люди-дикари ужасные, но добрые. Оказалось, что это поверье не соответствует действительности! Чему же теперь верить?

- $\triangleright$ Что люди-дикари не ужасные или не добрые

- Что люди-дикари не добрые, но прекрасные
- Что люди-дикари не ужасные
- Что люди-дикари злобные

Вариант 4. На острове Авалон всегда считалось, что феи вредные, но крошечные. Оказалось, что это поверье не соответствует действительности! Чему же теперь верить?

- ▷ Что феи не вредные или не крошечные
- Что феи рослые
- Что феи полезные и не крошечные
- Что феи не вредные

Задача 2. Что быстрее?

Вариант 1. Какая скорость передачи данных выше? (Отметьте все верные утверждения).

- ▷ 17280000 килобит/мин быстрее, чем 84 мегабайт/сек
- ▷ 120 мегабит/сек быстрее, чем 126000000000 байт/час
- 6720000 бит/час быстрее, чем 6 килобайт/мин

Вариант 2. Какая скорость передачи данных выше? (Отметьте все верные утверждения).

- 40320000000 бит/мин быстрее, чем 36 мегабайт/сек
- ▷ 216 мегабит/сек быстрее, чем 226800000 килобайт/час
- 134 килобит/час быстрее, чем 120 байт/мин

Вариант 3. Какая скорость передачи данных выше? (Отметьте все верные утверждения).

- ▷ 77760000 килобит/мин быстрее, чем 378 мегабайт/сек
- 392 мегабит/сек быстрее, чем 75600000000 байт/час
- 23520000 бит/час быстрее, чем 21 килобайт/мин

Вариант 4. Какая скорость передачи данных выше? (Отметьте все верные утверждения).

- ▷ 43 мегабайт/час быстрее, чем 224000 бит/сек
- 201 мегабит/час быстрее, чем 180 килобайт/мин
- 181 килобит/мин быстрее, чем 162 байт/сек

Задача 3. Пересечение прямых

Вариант 1. Для решения задачи по геометрии Петя написал программу, рисующую два произвольных пересекающихся отрезка шириной в одну точку на растровом экране с разрешением 1024 на 768 точек. Первый отрезок Петя нарисовал красным цветом на полностью чёрном фоне. Поверх этого он нарисовал второй отрезок жёлтым цветом. Затем Петя выяснил, какие точки на экране сменили цвет с красного на жёлтый. Что можно сказать об этих точках, если отрезки действительно пересекаются?

- ▷ Таких точек может быть и ни одной, и одна, и две, и три, и больше
- Существует ровно одна такая точка — точка пересечения отрезков
- Существует ровно одна такая точка — наилучшее приближение координатам точки пересечения отрезков
- Таких точек, являющихся наилучшим приближением координат точки пересечения отрезков, может быть только две (в случае равного приближения) или одна.

Вариант 2. Для решения задачи по геометрии Коля написал программу, рисующую два произвольных пересекающихся отрезка шириной в одну точку на растровом экране с разрешением 1280 на 800 точек. Первый отрезок Коля нарисовал жёлтым цветом на полностью чёрном фоне. Поверх этого он нарисовал второй отрезок голубым цветом. Затем Коля выяснил, какие точки на экране сменили цвет с жёлтого на голубой. Что можно сказать об этих точках, если отрезки действительно пересекаются?

- Таких точек, являющихся наилучшим приближением координат точки пересечения отрезков, может быть только две (в случае равного приближения) или одна.
- Такие точки есть всегда (хотя бы одна), но их может быть и две, и три, и больше

- Существует ровно одна такая точка — наилучшее приближение координатам точки пересечения отрезков
- ▷ Таких точек может не оказаться

Вариант 3. Для решения задачи по геометрии Миша написал программу, рисующую два произвольных пересекающихся отрезка шириной в одну точку на растровом экране с разрешением 1280 на 1024 точек. Первый отрезок Миша нарисовал голубым цветом на полностью чёрном фоне. Поверх этого он нарисовал второй отрезок зелёным цветом. Затем Миша выяснил, какие точки на экране сменили цвет с голубого на зелёный. Что можно сказать об этих точках, если отрезки действительно пересекаются?

- Такие точки есть всегда (хотя бы одна), но их может быть и две, и три, и больше
- Такой точки может не оказаться, а если она есть, то только одна
- Таких точек, являющихся наилучшим приближением координат точки пересечения отрезков, может быть только две (в случае равного приближения) или одна.
- ▷ Таких точек может оказаться больше, чем 10% от общего числа точёк в первом отрезке

Вариант 4. Для решения задачи по геометрии Серёжа написал программу, рисующую два произвольных пересекающихся отрезка шириной в одну точку на растровом экране с разрешением 1920 на 1200 точек. Первый отрезок Серёжа нарисовал зелёным цветом на полностью чёрном фоне. Поверх этого он нарисовал второй отрезок красным цветом. Затем Серёжа выяснил, какие точки на экране сменили цвет с зелёного на красный. Что можно сказать об этих точках, если отрезки действительно пересекаются?

- Такие точки есть всегда (хотя бы одна), но их может быть и две, и три, и больше
- ▷ Таких точек может быть и ни одной, и одна, и две, и три, и больше
- Такой точки может не оказаться, а если она есть, то только одна
- Существует ровно одна такая точка — точка пересечения отрезков

Задача 4. Сама простота

Вариант 1. Выберите верные утверждения:

- Число $2^{3^{2013}} + 3^{2013}$ делится нацело на 3.
- Число $2^{3^{2013}} + 3^{2013}$ делится нацело на 5.
- Число $2^{3^{2013}} + 3^{2013}$ простое.
- $\triangleright$ Среди остальных утверждений нет правильных.

Решение. Число $2^{3^{2013}} + 3^{2013}$ не делится нацело на 3, так как первое слагаемое не делится на 3 нацело, а второе делится.

Изучим делимость этого числа на 5. Из признака делимости на 5 следует, что достаточно узнать последнюю цифру результата. Анализируя последние цифры последовательных натуральных степеней двойки и тройки, нетрудно прийти к следующим выводам: при любом натуральном k число 2^{4k+1} оканчивается на 2, число 2^{4k+2} оканчивается на 4, число 2^{4k+3} оканчивается на 8, число 2^{4k} оканчивается на 6, число 3^{4k+1} оканчивается на 3, число 3^{4k+2} оканчивается на 9, число 3^{4k+3} оканчивается на 7, число 3^{4k} оканчивается на 1. Так как $2013 = 4 \cdot 503 + 1$, то число 3^{2013} оканчивается на 3. Заметим, что

$$3^{2013} = 3 \cdot 9^{506} = 3 \cdot \underbrace{(4 \cdot 2 + 1) \cdot (4 \cdot 2 + 1) \cdot \dots \cdot (4 \cdot 2 + 1)}_{506} = 3 \cdot (4M + 1) = 4N + 3.$$

Значит, число $2^{3^{2013}}$ оканчивается на 8, а число $2^{3^{2013}} + 3^{2013}$ оканчивается на 1 и не делится на 5 нацело.

Число $2^{3^{2013}} + 3^{2013}$ не является простым, так как представляет собой сумму кубов натуральных чисел и раскладывается на большие единицы целые множители:

$$2^{3^{2013}} + 3^{2013} = \left(2^{3^{2012}}\right)^3 + (3^{671})^3 = \left(2^{3^{2012}} + 3^{671}\right) \cdot \left(2^{2 \cdot 3^{2012}} - 2^{3^{2012}} \cdot 3^{671} + 3^{1342}\right).$$

Вариант 2. Выберите верные утверждения:

- Число $2^{3^{2013}} + 2013^{2013}$ делится нацело на 3.
- Число $2^{3^{2013}} + 2013^{2013}$ делится нацело на 5.
- Число $2^{3^{2013}} + 2013^{2013}$ простое.
- $\triangleright$ Среди остальных утверждений нет правильных.

Решение. Число $2^{3^{2013}} + 2013^{2013}$ не делится нацело на 3, так как первое слагаемое не делится на 3 нацело, а второе делится.

Изучим делимость этого числа на 5. Из признака делимости на 5 следует, что достаточно узнать последнюю цифру результата. Эта цифра будет, очевидно, такой же, как у числа $2^{3^{2013}} + 3^{2013}$. Анализируя последние цифры последовательных натуральных степеней двойки и тройки, нетрудно прийти к следующим выводам: при любом натуральном k число 2^{4k+1} оканчивается на 2, число 2^{4k+2} оканчивается на 4, число 2^{4k+3} оканчивается на 8, число 2^{4k} оканчивается на 6, число 3^{4k+1} оканчивается на 3, число 3^{4k+2} оканчивается на 9, число 3^{4k+3} оканчивается на 7, число 3^{4k} оканчивается на 1. Так как $2013 = 4 \cdot 503 + 1$, то число 3^{2013} оканчивается на 3. Заметим, что

$$3^{2013} = 3{\cdot}9^{506} = 3{\cdot}\underbrace{(4 \cdot 2 + 1) \cdot (4 \cdot 2 + 1) \cdot \dots \cdot (4 \cdot 2 + 1)}_{506} = 3{\cdot}(4M{+}1) = 4N{+}3.$$

Значит, число $2^{3^{2013}}$ оканчивается на 8, а число $2^{3^{2013}} + 3^{2013}$ оканчивается на 1 и не делится на 5 нацело.

Число $2^{3^{2013}} + 2013^{2013}$ не является простым, так как представляет собой сумму кубов натуральных чисел и раскладывается на большие единицы целые множители:

$$2^{3^{2013}} + 2013^{2013} = \left(2^{3^{2012}}\right)^3 + (2013^{671})^3 =$$

$$= \left(2^{3^{2012}} + 2013^{671}\right) \cdot \left(2^{2\cdot 3^{2012}} - 2^{3^{2012}} \cdot 2013^{671} + 2013^{1342}\right).$$

Вариант 3. Выберите верные утверждения:

- Число $3^{3^{2013}} + 2^{2013}$ делится нацело на 3.
- Число $3^{3^{2013}} + 2^{2013}$ делится нацело на 5.
- Число $3^{3^{2013}} + 2^{2013}$ простое.
- $\triangleright$ Среди остальных утверждений нет правильных.

Решение. Число $3^{3^{2013}} + 2^{2013}$ не делится нацело на 3, так как первое слагаемое делится на 3 нацело, а второе не делится.

Изучим делимость этого числа на 5. Из признака делимости на 5 следует, что достаточно узнать последнюю цифру результата. Эта цифра будет, очевидно, такой же, как у числа $2^{3^{2013}} + 3^{2013}$. Анализируя последние цифры последовательных натуральных степеней двойки и тройки, нетрудно прийти к следующим выводам: при любом натуральном k число 2^{4k+1} оканчивается на 2, число 2^{4k+2} оканчивается на 4, число 2^{4k+3} оканчивается на 8, число 2^{4k} оканчивается на 6, число 3^{4k+1} оканчивается на 3, число 3^{4k+2} оканчивается на 9, число 3^{4k+3} оканчивается на 7, число 3^{4k} оканчивается на 1. Так как $2013 = 4 \cdot 503 + 1$, то число 2^{2013} оканчивается на 2. Заметим, что

$$3^{2013} = 3 \cdot 9^{506} = 3 \cdot \underbrace{(4 \cdot 2 + 1) \cdot (4 \cdot 2 + 1) \cdot \cdots \cdot (4 \cdot 2 + 1)}_{506} = 3 \cdot (4M+1) = 4N+3.$$

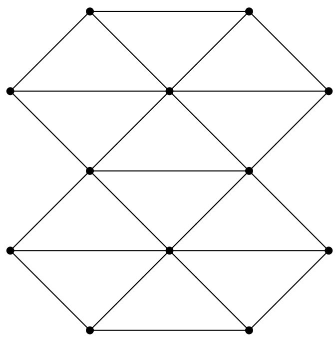
Значит, число $3^{3^{2013}}$ оканчивается на 7, а число $3^{3^{2013}} + 2^{2013}$ оканчивается на 9 и не делится на 5 нацело.

Число $2^{3^{2013}} + 2013^{2013}$ не является простым, так как представляет собой сумму кубов натуральных чисел и раскладывается на большие единицы целые множители:

$$3^{3^{2013}} + 2^{2013} = \left(3^{3^{2012}}\right)^3 + (2^{671})^3 = \left(3^{3^{2012}} + 2^{671}\right) \cdot \left(3^{2 \cdot 3^{2012}} - 3^{3^{2012}} \cdot 2^{671} + 2^{1342}\right).$$

Задача 5. Замкнутые ломаные.

Сколько существует различных несамопересекающихся замкнутых ломаных, вершинами которых являются все вершины изображенной на рисунке фигуры, и только они, а отрезками — только отрезки изображенной на рисунке фигуры?



Ответ. 25.

Решение. Легко видеть, что в условиях задачи для каждой «половины» (верхней и нижней) нарисованной фигуры имеется ровно 5 способов провести фрагмент ломаной, соединяющий две вершины на центральной горизонтали и проходящий через все точки данной половины. Следовательно, общее число искомых ломаных равно 25.

Задача 6. Замощения.

Шахматную доску 8×8 (с длиной стороны клетки, равной 1) без четырех угловых клеток полностью и без перекрытий замощают плоскими фигурами двух типов: квадратами 2×2 (фигуры типа A), а также фигурами, полученными из прямоугольников со сторонами 2 и 3 удалением двух клеток в противоположных (соединяемых диагональю) углах прямоугольника (фигуры типа B). Выберите все верные утверждения.

- Существуют такие замощения с не более чем четырьмя фигурами типа B.
- Существуют такие замощения с не более чем пятью фигурами типа B.
- $\triangleright$ Существуют такие замощения с не более чем шестью фигурами типа B.
- $\triangleright$ Существуют такие замощения с не менее чем десятью фигурами типа B.
- $\triangleright$ Существуют такие замощения с не менее чем одиннадатью фигурами типа B.
- $\triangleright$ Существуют такие замощения с не менее чем двенадцатью фигурами типа B.

Решение. Доска изображена на рисунке 1.

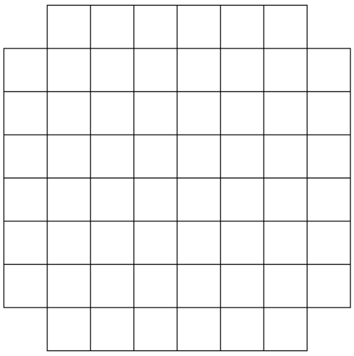


Рис. 1.

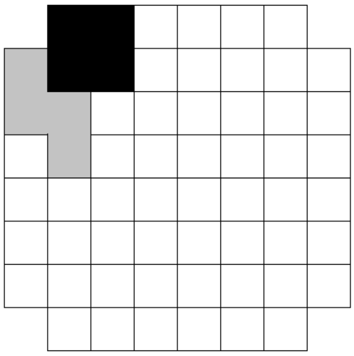
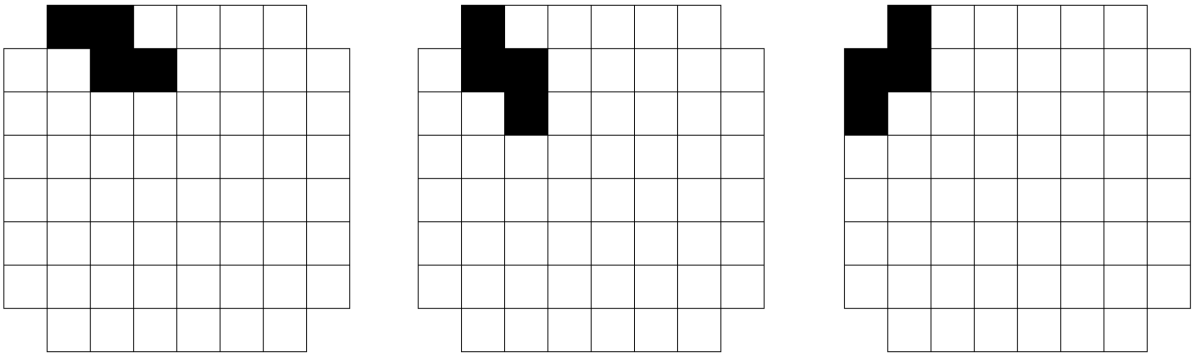


Рис. 2.



а). *б).* *в).*

Рис. 3.

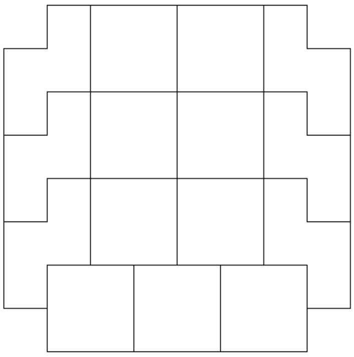


Рис. 4.

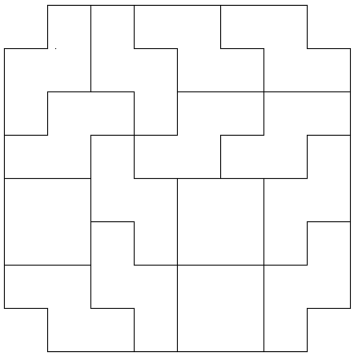


Рис. 5.

Ясно, что к каждой из удаленных из углов доски клеток должна прилегать хотя бы одна фигура типа B (см. рис. 2, на котором вначале к верхней левой угловой клетке была приложена фигура типа A, — фигура типа B при этом расположилась единственно возможным образом). Следовательно, количество фигур типа B уже не меньше 4. Всевозможные (с точностью до симметрий) способы приложения фигур типа B к отсутствующей угловой клетке приведены на рис. 3 (а-в). Легко видеть, что в каждом из этих случаев замощение окружающих такую фигуру типа B клеток только лишь фигурами типа A невозможно, то есть к каждой из 4 «угловых» фигур типа В должна прилегать еще хотя бы одна фигура типа В, и общее число фигур типа В не меньше 6. На рисунке 4 показано заможение доски ровно шестью фигурами типа В. На рисунке 5 показано замощение доски ровно с двенадцатью фигурами типа В.

Задача 7. Цифры.

Найти сумму выражений $(\overline{abcd})^2 + e^2 + f^2 + g^2$ по всем решениям системы

$$\begin{cases} \mathrm{Inc}(\overline{abcd}) + e + f + g = 1755, \\ \mathrm{Dec}(\overline{abcd}) + e \cdot f \cdot g = 2013, \end{cases}$$

где $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$ — не обязательно различные числа из множества $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9\}$, запись $\overline{abcd}$ обозначает четырехзначное десятичное число, цифрами которого являются $a,\ b,\ c,\ d$ в указанном порядке, $\mathrm{Inc}(x) = x + 1$, $\mathrm{Dec}(x) = x - 1$, $e \leq f \leq g$.

Ответ: 3006894.

Решение. Очевидно, $a = 1$, $b = 7$. Имеем

$$\begin{cases} (\overline{cd}) + e + f + g = 54, \\ (\overline{cd}) + efg = 314. \end{cases}$$

Так как $e+f+g \in [0;\ 27]$, то $(\overline{cd}) \in \{27;\ 28;\ \ldots;\ 54\}$, откуда $c \in \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. Рассмотрим эти случаи последовательно.

1) Пусть $c = 5$, тогда система приводится к виду

$$\begin{cases} d + e + f + g = 4, \\ d + efg = 264, \end{cases}$$

откуда

$$255 \leq 264 - d = efg \leq \left(\frac{e+f+g}{3}\right)^3 = \left(\frac{4-d}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3,$$

— противоречие, в этом случае решений нет.

2) Пусть $c = 4$, тогда система приводится к виду

$$\begin{cases} d + e + f + g = 14, \\ d + efg = 274, \end{cases}$$

откуда

$$265 \leq 274 - d = efg \leq \left(\frac{e+f+g}{3}\right)^3 = \left(\frac{14-d}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{14}{3}\right)^3 < 125,$$

— противоречие, и в этом случае решений нет.

3) Пусть $c=3$, тогда система приводится к виду

$$\begin{cases} d+e+f+g=24, \\ d+efg=284. \end{cases}$$

Так как $e \le f \le g$, то $e \ge \frac{284-d}{9^2} \ge \frac{275}{81} > 3$, а также $e^3 \le 284$, то есть $c<7$.

а) Если $e=4$, то $fg \in \left[\frac{284-9}{4};\ \frac{284}{4}\right]$, $fg \in \{69;\ 70;\ 71\}$. Но ни одно из этих чисел (69, 70, 71) не является произведением двух целых чисел от 0 до 9. В этом случае решений нет.

б) Если $e=5$, то $fg \in \left[\frac{284-9}{5};\ \frac{284}{5}\right]$, $fg \in \{55;\ 56\}$. Отсюда с учетом неравенства $e \le f \le g$ получим: $f=7$, $g=8$, и, значит, $d=4$. В этом случае имеем решение системы $(a;\ b;\ c;\ d;\ e;\ f;\ g) = (1;\ 7;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8)$, и вклад этого решения в сумму выражений $(\overline{abcd})^2+e^2+f^2+g^2$ равен 3006894.

в) Если $e=6$, то $fg \in \left[\frac{284-9}{6};\ \frac{284}{6}\right]$, $fg \in \{46;\ 47\}$. Но ни одно из этих чисел (46, 47) не является произведением двух целых чисел от 0 до 9. В этом случае решений нет.

4) Пусть $c=2$, тогда система приводится к виду

$$\begin{cases} d+e+f+g=34, \\ d+efg=294. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что среди чисел d, e, f, g имеется хотя бы две девятки. Так как $e \le f \le g$, то возможны два случая для второго уравнения.

а) $9+e\cdot f\cdot 9=294$. Но 294 не делится нацело на 9, решений нет.

б) $d+e\cdot 9\cdot 9=294$, то есть $81e=294-d$, $e \in \left[\frac{285}{81};\ \frac{294}{81}\right]$, решений нет.

Олимпиада школьников
по прикладной математике и информатике
факультета ВМК МГУ
имени М. В. Ломоносова

Заочный тур

2 марта 2013 года

9–10 классы

Правильный вариант ответа выделяется символом ▷. В задачах 1 и 2 решения не приводятся.

Задача 1. Что быстрее?

Вариант 1. Какая скорость передачи данных выше? (Отметьте все верные утверждения).

- ▷ 17280000 килобит/мин быстрее, чем 84 мегабайт/сек
- ▷ 120 мегабит/сек быстрее, чем 126000000000 байт/час
- 6720000 бит/час быстрее, чем 6 килобайт/мин

Вариант 2. Какая скорость передачи данных выше? (Отметьте все верные утверждения).

- 40320000000 бит/мин быстрее, чем 36 мегабайт/сек
- ▷ 216 мегабит/сек быстрее, чем 226800000 килобайт/час
- 134 килобит/час быстрее, чем 120 байт/мин

Вариант 3. Какая скорость передачи данных выше? (Отметьте все верные утверждения).

- ▷ 77760000 килобит/мин быстрее, чем 378 мегабайт/сек
- 392 мегабит/сек быстрее, чем 75600000000 байт/час
- 23520000 бит/час быстрее, чем 21 килобайт/мин

Вариант 4. Какая скорость передачи данных выше? (Отметьте все верные утверждения).

- ▷ 43 мегабайт/час быстрее, чем 224000 бит/сек
- 201 мегабит/час быстрее, чем 180 килобайт/мин
- 181 килобит/мин быстрее, чем 162 байт/сек

Задача 2. Пересечение прямых

Вариант 1. Для решения задачи по геометрии Петя написал программу, рисующую два произвольных пересекающихся отрезка шириной в одну точку на растровом экране с разрешением 1024 на 768 точек. Первый отрезок Петя нарисовал красным цветом на полностью чёрном фоне. Поверх этого он нарисовал второй отрезок жёлтым цветом. Затем Петя выяснил, какие точки на экране сменили цвет с красного на жёлтый. Что можно сказать об этих точках, если отрезки действительно пересекаются?

- ▷ Таких точек может быть и ни одной, и одна, и две, и три, и больше
- Существует ровно одна такая точка — точка пересечения отрезков
- Существует ровно одна такая точка — наилучшее приближение координатам точки пересечения отрезков
- Таких точек, являющихся наилучшим приближением координат точки пересечения отрезков, может быть только две (в случае равного приближения) или одна.

Вариант 2. Для решения задачи по геометрии Коля написал программу, рисующую два произвольных пересекающихся отрезка шириной в одну точку на растровом экране с разрешением 1280 на 800 точек. Первый отрезок Коля нарисовал жёлтым цветом на полностью чёрном фоне. Поверх этого он нарисовал второй отрезок голубым цветом. Затем Коля выяснил, какие точки на экране сменили цвет с жёлтого на голубой. Что можно сказать об этих точках, если отрезки действительно пересекаются?

- Таких точек, являющихся наилучшим приближением координат точки пересечения отрезков, может быть только две (в случае равного приближения) или одна.
- Такие точки есть всегда (хотя бы одна), но их может быть и две, и три, и больше

- Существует ровно одна такая точка — наилучшее приближение координатам точки пересечения отрезков
- ▷ Таких точек может не оказаться

Вариант 3. Для решения задачи по геометрии Миша написал программу, рисующую два произвольных пересекающихся отрезка шириной в одну точку на растровом экране с разрешением 1280 на 1024 точек. Первый отрезок Миша нарисовал голубым цветом на полностью чёрном фоне. Поверх этого он нарисовал второй отрезок зелёным цветом. Затем Миша выяснил, какие точки на экране сменили цвет с голубого на зелёный. Что можно сказать об этих точках, если отрезки действительно пересекаются?

- Такие точки есть всегда (хотя бы одна), но их может быть и две, и три, и больше
- Такой точки может не оказаться, а если она есть, то только одна
- Таких точек, являющихся наилучшим приближением координат точки пересечения отрезков, может быть только две (в случае равного приближения) или одна.
- ▷ Таких точек может оказаться больше, чем 10% от общего числа точёк в первом отрезке

Вариант 4. Для решения задачи по геометрии Серёжа написал программу, рисующую два произвольных пересекающихся отрезка шириной в одну точку на растровом экране с разрешением 1920 на 1200 точек. Первый отрезок Серёжа нарисовал зелёным цветом на полностью чёрном фоне. Поверх этого он нарисовал второй отрезок красным цветом. Затем Серёжа выяснил, какие точки на экране сменили цвет с зелёного на красный. Что можно сказать об этих точках, если отрезки действительно пересекаются?

- Такие точки есть всегда (хотя бы одна), но их может быть и две, и три, и больше
- ▷ Таких точек может быть и ни одной, и одна, и две, и три, и больше
- Такой точки может не оказаться, а если она есть, то только одна
- Существует ровно одна такая точка — точка пересечения отрезков

Задача 3. Из жизни насекомых.

Вариант 1. Из вершин A и B в направлении вершины C равностороннего треугольника ABC (с длиной стороны 2 метра) одновременно поползли гусеница и жучок со скоростями 0,1 м/мин и 0,4 м/мин (соответственно). Указать минимальное целое число минут (прошедшее от начала движения), за которое гусеница и жучок успеют оказаться на максимально близком расстоянии друг от друга.

Ответ: 4 минуты.

Вариант 2. Из вершин A и B в направлении вершины C равностороннего треугольника ABC (с длиной стороны 2 метра) одновременно поползли гусеница и жучок со скоростями 0,1 м/мин и 0,5 м/мин (соответственно). Указать минимальное целое число минут (прошедшее от начала движения), за которое гусеница и жучок успеют оказаться на максимально близком расстоянии друг от друга.

Ответ: 3 минуты.

Вариант 3. Из вершин A и B в направлении вершины C равностороннего треугольника ABC (с длиной стороны 2 метра) одновременно поползли гусеница и жучок со скоростями 0,2 м/мин и 0,5 м/мин (соответственно). Указать минимальное целое число минут (прошедшее от начала движения), за которое гусеница и жучок успеют оказаться на максимально близком расстоянии друг от друга.

Ответ: 4 минуты.

Решение. Введем декартовы координаты на плоскости так, чтобы середина O отрезка AC стала бы началом координат, точки A, B и C имели бы координаты $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ \sqrt{3})$ и $C(1;\ 0)$. Обозначим через v м/мин скорость гусеницы, а через u м/мин — скорость жучка. Пусть A_t и B_t — точки, в которых находятся гусеница и жучок соответственно через t минут после начала движения. Легко видеть, что координаты этих точек таковы: $A_t(-1+vt;\ 0)$, $B_t\left(\frac{ut}{2};\ \sqrt{3}-\frac{ut\sqrt{3}}{2}\right)$. Тогда квадрат расстояния между точками A_t и B_t равен

$$|A_tB_t|^2 = \left((vt-1)-\frac{ut}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{ut\sqrt{3}}{2}\right)^2 = t^2(u^2+v^2-uv)-2t(u+v)+4.$$

Последнее выражение есть квадратичная функция по t с положительным старшим коэффициентом, следовательно, время $t_{\min}$, через которое гусеница и жучок окажутся ближе всего друг к другу, вычисляется как абсцисса вершины параболы $y = t^2(u^2 + v^2 - uv) - 2t(u + v) + 4$, а именно: $t_{\min} = \frac{u+v}{u^2+v^2-uv}$. Подставляя значения u и v из условия и беря целую часть сверху от вычисленного $t_{\min}$, получаем ответ.

Задача 4. Замощения.

Шахматную доску 8×8 (с длиной стороны клетки, равной 1) без четырех угловых клеток полностью и без перекрытий замощают плоскими фигурами двух типов: квадратами 2×2 (фигуры типа A), а также фигурами, полученными из прямоугольников со сторонами 2 и 3 удалением двух клеток в противоположных (соединяемых диагональю) углах прямоугольника (фигуры типа B). Выберите все верные утверждения.

- Существуют такие замощения с не более чем четырьмя фигурами типа B.
- Существуют такие замощения с не более чем пятью фигурами типа B.
- $\triangleright$ Существуют такие замощения с не более чем шестью фигурами типа B.
- $\triangleright$ Существуют такие замощения с не менее чем десятью фигурами типа B.
- $\triangleright$ Существуют такие замощения с не менее чем одиннадатью фигурами типа B.
- $\triangleright$ Существуют такие замощения с не менее чем двенадцатью фигурами типа B.

Решение. Доска изображена на рисунке 1.

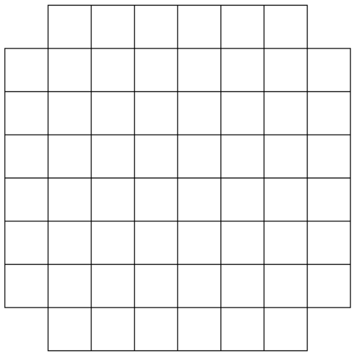


Рис. 1.

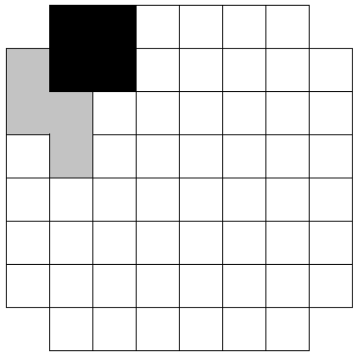
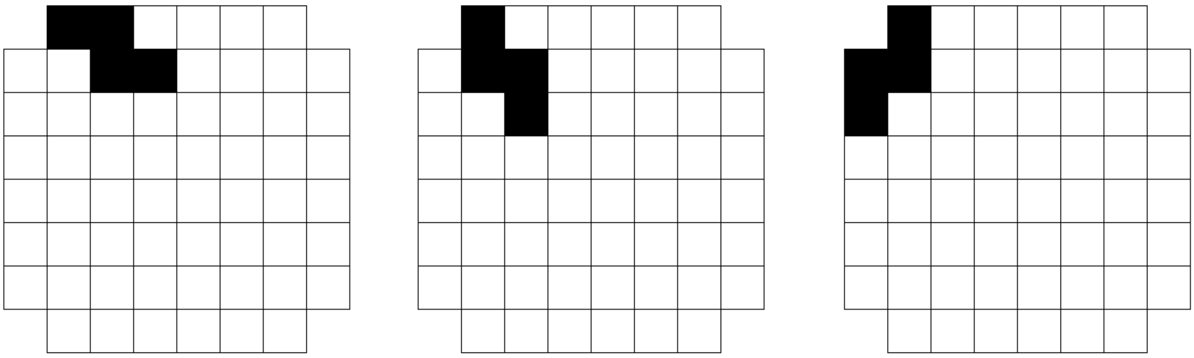


Рис. 2.



а). *б).* *в).*

Рис. 3.

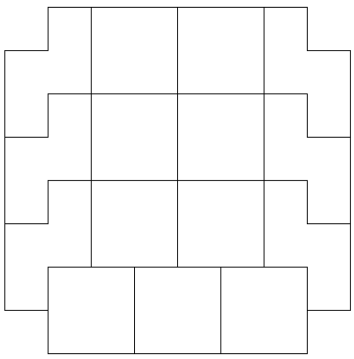


Рис. 4.

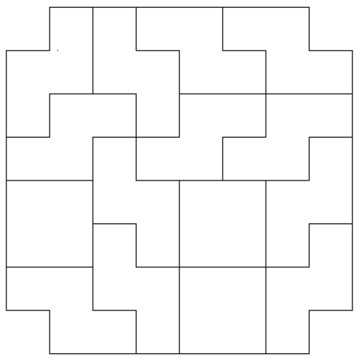


Рис. 5.

Ясно, что к каждой из удаленных из углов доски клеток должна прилегать хотя бы одна фигура типа B (см. рис. 2, на котором вначале к верхней левой угловой клетке была приложена фигура типа A, — фигура типа B при этом расположилась единственно возможным образом). Следовательно, количество фигур типа B уже не меньше 4. Всевозможные (с точностью до симметрий) способы приложения фигур типа B к отсутствующей угловой клетке приведены на рис. 3 (а-в). Легко видеть, что в каждом из этих случаев замощение окружающих такую фигуру типа B клеток только лишь фигурами типа A невозможно, то есть к каждой из 4 «угловых» фигур типа В должна прилегать еще хотя бы одна фигура типа В, и общее число фигур типа В не меньше 6. На рисунке 4 показано заможение доски ровно шестью фигурами типа В. На рисунке 5 показано замощение доски ровно с двенадцатью фигурами типа В.

Задача 5. Дальность.

Вариант 1. Шарик пренебрежимо малого размера, бросаемый из начала координат вертикальной декартовой плоскости Oxy, описывает сначала траекторию $y = x(a - x)$ ($x \geq 0$, $a > 0$). Известно, что на высоте 1 (в этой плоскости) подвешены две горизонтальные полки длиной 1 каждая — с абсциссами концов 3 и 4 для первой полки и 7 и 8 — для второй. Ударившись о полку, шарик начинает лететь по траектории, симметричной предыдущей относительно вертикальной прямой, проходящей через точку удара. Какова максимальная дальность полета шарика (по всевозможным значениям a) от начала координат до точки первого "падения"шарика на горизонтальную координатную ось при условии, что он ударился и о первую полку, и о вторую?

Ответ: 11,75.

Решение. Проведем горизонтальную прямую $y = 1$. Из условия задачи следует, что фрагменты различных парабол, составляющие траекторию движения шарика, отсекут от этой прямой равные отрезки (обозначим длину каждого из них через l). (Ясно, что шарик не может более одного раза ударится о первую, как и о вторую, полку, и число указанных фрагментов в искомой траектории равно трем). Следовательно, чем дальше располагается правый конец первого (самого левого) из указанных отрезков длины l, тем больше дальность полета шарика. Максимально возможное значение абсциссы правого конца первого отрезка равно по условию 4. Выясним, существует ли траектория из трех фрагментов трех парабол при достижении этого значения. Подставляя в уравнение $y = x(a - x)$ координаты $(4;\ 1)$ правого конца первого отрезка, получим, что $1 = 4 \cdot (a - 4)$, $a = 4,25$. Следовательно, шарик летел по сначала траектории $y = x(4,25 - x)$, и высоты 1 впервые достиг в точке с абсциссой $0,25$ (это значение проще всего найти по теореме Виета: для всех точек с ординатой 1 на данной параболе выполняется равенство $x(4,25 - x) = 1$, т. е. $x^2 - 4,25x + 1 = 0$, но один из корней этого уравнения равен 4, значит второй равен $0,25$). Следовательно, длина l первого отрезка равна $4 - 0,25 = 3,75$. Правый конец второго отрезка длины l имеет, таким образом, абсциссу $4 + 3,75 = 7,75 \in [7;\ 8]$, то есть шарик ударится о каждую полку по одному разу. Общая дальность полета шарика при этом составит (из соображений симметрии) величину

$0,25+3,75+3,75+3,75+0,25=11,75.$

Вариант 2. Шарик пренебрежимо малого размера, бросаемый из начала координат вертикальной декартовой плоскости Oxy, описывает сначала часть параболы $y = x(a - x)$ $(x \geq 0,\ a > 0)$. Известно, что на высоте 1 (в этой плоскости) подвешены две горизонтальные полки длиной 1 каждая — с абсциссами концов 4 и 5 для первой полки и 9 и10 — для второй. Ударившись о полку, шарик начинает лететь по параболе, симметричной предыдущей относительно вертикальной прямой, проходящей через точку удара. Какова максимальная дальность полета шарика (по всевозможным значениям a) от начала координат до точки первого "падения"шарика на горизонтальную координатную ось при условии, что он ударился и о первую полку, и о вторую?

Ответ: 14,8.

Решение. Проведем горизонтальную прямую $y = 1$. Из условия задачи следует, что фрагменты различных парабол, составляющие траекторию движения шарика, отсекут от этой прямой равные отрезки (обозначим длину каждого из них через l). (Ясно, что шарик не может более одного раза ударится о первую, как и о вторую, полку, и число указанных фрагментов в искомой траектории равно трем). Следовательно, чем дальше располагается правый конец первого (самого левого) из указанных отрезков длины l, тем больше дальность полета шарика. Максимально возможное значение абсциссы правого конца первого отрезка равно по условию 5. Выясним, существует ли траектория из трех фрагментов трех парабол при достижении этого значения. Подставляя в уравнение $y = x(a - x)$ координаты $(5;\ 1)$ правого конца первого отрезка, получим, что $1 = 5 \cdot (a - 5)$, $a = 5,2$. Следовательно, шарик летел по сначала траектории $y = x(5,2-x)$, и высоты 1 впервые достиг в точке с абсциссой $0,2$ (это значение проще всего найти по теореме Виета: для всех точек с ординатой 1 на данной параболе выполняется равенство $x(5,2 - x) = 1$, т. е. $x^2 - 5,2x + 1 = 0$, но один из корней этого уравнения равен 5, значит второй равен $0,2$). Следовательно, длина l первого отрезка равна $5 - 0,2 = 4,8$. Правый конец второго отрезка длины l имеет, таким образом, абсциссу $5 + 4,8 = 9,8 \in [9;\ 10]$, то есть шарик ударится о каждую полку по одному разу. Общая дальность полета шарика при этом составит (из сооображений симметрии) величину $0,2+4,8+4,8+4,8+0,2 = 14,8$.

Задача 6. Цифры.

Найти сумму выражений $(\overline{abcd})^2 + e^2 + f^2 + g^2$ по всем решениям системы

$$\begin{cases} \mathrm{Inc}(\overline{abcd}) + e + f + g = 1755, \\ \mathrm{Dec}(\overline{abcd}) + e \cdot f \cdot g = 2013, \end{cases}$$

где $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$ — не обязательно различные числа из множества $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 9\}$, запись $\overline{abcd}$ обозначает четырехзначное десятичное число, цифрами которого являются $a,\ b,\ c,\ d$ в указанном порядке, $\mathrm{Inc}(x) = x + 1$, $\mathrm{Dec}(x) = x - 1$, $e \le f \le g$.

Ответ: 3006894.

Решение. Очевидно, $a = 1$, $b = 7$. Имеем

$$\begin{cases} (\overline{cd}) + e + f + g = 54, \\ (\overline{cd}) + efg = 314. \end{cases}$$

Так как $e+f+g \in [0;\ 27]$, то $(\overline{cd}) \in \{27;\ 28;\ \ldots;\ 54\}$, откуда $c \in \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. Рассмотрим эти случаи последовательно.

1) Пусть $c = 5$, тогда система приводится к виду

$$\begin{cases} d + e + f + g = 4, \\ d + efg = 264, \end{cases}$$

откуда

$$255 \le 264 - d = efg \le \left(\frac{e+f+g}{3}\right)^3 = \left(\frac{4-d}{3}\right)^3 \le \left(\frac{4}{3}\right)^3,$$

— противоречие, в этом случае решений нет.

2) Пусть $c = 4$, тогда система приводится к виду

$$\begin{cases} d + e + f + g = 14, \\ d + efg = 274, \end{cases}$$

откуда

$$265 \le 274 - d = efg \le \left(\frac{e+f+g}{3}\right)^3 = \left(\frac{14-d}{3}\right)^3 \le \left(\frac{14}{3}\right)^3 < 125,$$

— противоречие, и в этом случае решений нет.

3) Пусть $c = 3$, тогда система приводится к виду

$$\begin{cases} d + e + f + g = 24, \\ d + efg = 284. \end{cases}$$

Так как $e \le f \le g$, то $e \ge \frac{284-d}{9^2} \ge \frac{275}{81} > 3$, а также $e^3 \le 284$, то есть $c < 7$.

а) Если $e = 4$, то $fg \in \left[\frac{284-9}{4};\ \frac{284}{4}\right]$, $fg \in \{69;\ 70;\ 71\}$. Но ни одно из этих чисел (69, 70, 71) не является произведением двух целых чисел от 0 до 9. В этом случае решений нет.

б) Если $e = 5$, то $fg \in \left[\frac{284-9}{5};\ \frac{284}{5}\right]$, $fg \in \{55;\ 56\}$. Отсюда с учетом неравенства $e \le f \le g$ получим: $f = 7$, $g = 8$, и, значит, $d = 4$. В этом случае имеем решение системы $(a;\ b;\ c;\ d;\ e;\ f;\ g) = (1;\ 7;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8)$, и вклад этого решения в сумму выражений $(\overline{abcd})^2 + e^2 + f^2 + g^2$ равен 3006894.

в) Если $e = 6$, то $fg \in \left[\frac{284-9}{6};\ \frac{284}{6}\right]$, $fg \in \{46;\ 47\}$. Но ни одно из этих чисел (46, 47) не является произведением двух целых чисел от 0 до 9. В этом случае решений нет.

4) Пусть $c = 2$, тогда система приводится к виду

$$\begin{cases} d + e + f + g = 34, \\ d + efg = 294. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что среди чисел d, e, f, g имеется хотя бы две девятки. Так как $e \le f \le g$, то возможны два случая для второго уравнения.

а) $9 + e \cdot f \cdot 9 = 294$. Но 294 не делится нацело на 9, решений нет.

б) $d + e \cdot 9 \cdot 9 = 294$, то есть $81e = 294 - d$, $e \in \left[\frac{285}{81};\ \frac{294}{81}\right]$, решений нет.

Задача 7. Уравнение.

Найти сумму квадратов всех корней уравнения

$$2 \cdot \sqrt[3]{4x-1} = 8x^3 + 1.$$

Ответ: 1.

Решение. Возведем уравнение в куб и преобразуем его:

$$(8x^3+1)^3 = 8(4x-1) \ \Leftrightarrow$$

$$2\left(2x^3 + \frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{4} = x. \qquad (1)$$

Обозначим $f(t) = 2t^3 + \frac{1}{4}$.

Так как функция $f(t)$ строго возрастает на всей числовой прямой, то уравнение

$$f(f(x)) = x \qquad (2)$$

равносильно уравнению

$$f(x) = x. \qquad (3)$$

Действительно, пусть x_0 — корень уравнения (3). Тогда $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, то есть x_0 — корень уравнения (2). Пусть теперь x_0 — корень уравнения

(2), но не корень уравнения (3). Будем для определенности ситать, что $f(x_0) < x_0$ (случай $f(x_0) > x_0$ аналогичен). Тогда $f(f(x_0)) < f(x_0) < x_0$ (в силу строгого возрастания $f(t)$), то есть x_0 — не корень уравнения (2). Противоречие доказывает требуемое.

Значит, уравнение (1) равносильно уравнению

$$2x^3 + \frac{1}{4} = x \;\Leftrightarrow\; 8x^3 - 4x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (2x-1)(4x^2+2x-1) = 0,$$

откуда находим корни: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, $x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

Следовательно, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.