Заочный тур олимпиады по прикладной математике и информатике факультета вычмслительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова для школьников

12 апреля 2014 года

Ответы и решения задач

Правильные ответы помечены символом «$\triangleright$».

Слишком большой экран?

Петя написал программу, изображающую график функции $2/(|x+2|+0,003)$ в виде ломаной из 200 точек в диапазоне от -5 до 4. Чтобы график хорошо помещался на экране, Петя вычислил минимум и максимум функции на этом отрезке, и исходя из этого вычислил масштаб по вертикали. Однако график оказался далеко от границ экрана! Почему?

- Кривая, которую заменяет один из отрезков ломаной, содержит больше точек, чем этот отрезок.
- График, построенный на основе ломаной, никогда не проходит через точку минимума или максимума функции.
- Абсциссы вершин ломаной пришлись далеко от значения x, на котором достигается наименьшее значение функции.
- $\triangleright$ Абсциссы вершин ломаной пришлись далеко от значения x, на котором достигается наибольшее значение функции.

Сравнения

Имеется целочисленный массив из четырех различных элементов, значения которых недоступны пользователю. За один шаг пользователь может узнать, какой из двух выбранных им элементов массива больше. Укажите минимальное число шагов, гарантированно достаточное для того, чтобы выяснить, в каком порядке должны быть упорядочены по возрастанию элементы произвольного массива указанного вида.

Ответ. 5.

Решение. Будем, не ограничивая общности, считать, что элементами массива являются числа 1, 2, 3, 4. Заметим, что общее количество упорядочений этих чисел равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$. Значит, до первого шага число возможных вариантов упорядочений равно 24, и они образуют один класс неотличимых пока друг от друга упорядочений. После каждого шага каждый из таких классов (классов неотличимых пока друг от друга упорядочений), имевшихся до этого шага, может разбиться не более чем на два класса благодаря информации, появившейся на этом шаге. Значит, за четыре шага может образоваться не более чем $2^4 = 16$ классов, содержащих 24 упорядочения, следовательно, какой-то класс будет содержать более одного упорядочения, и за 4 шага невозможно установить, какое из упорядочений этого класса имеет место. Таким образом, четырех шагов недостаточно.

Покажем, что пяти шагов достаточно. Обозначим элементы массива a_1, a_2, a_3, a_4 — в соответствии с порядком следования их в массиве.

Обозначим через Вопрос$[\Lambda]$ вопрос, заданный на первом шаге, а через Вопрос$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}]$ — вопрос, заданный на k-ом шаге в случае, если до этого на вопрос, заданный на i-ом шаге (i пробегает последовательно значения от 1 до $k-1$, $k \geq 2$) ответ был таким: «Да» при $\alpha_i = 1$ и «Нет» при $\alpha_i = 0$. Аналогично, через Упорядочение$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ обозначим упорядочение (если оно единственно), которое определяется после k вопросов так, что ответ на вопрос, заданный на i-ом шаге (i пробегает последовательно значения от 1 до k) был таким: «Да» при $\alpha_i = 1$ и «Нет» при $\alpha_i = 0$.

Вопрос$[\Lambda]$ = «$a_1 < a_2$?»
Вопрос$[1]$ = «$a_3 < a_4$?»
Вопрос$[11]$ = «$a_2 < a_4$?»
Вопрос$[111]$ = «$a_2 < a_3$?»
Упорядочение$[1111]$ = «$a_1 a_2 a_3 a_4$».
Вопрос$[1110]$ = «$a_1 < a_3$?»
Упорядочение$[11101]$ = «$a_1 a_3 a_2 a_4$».
Упорядочение$[11100]$ = «$a_3 a_1 a_2 a_4$».
Вопрос$[110]$ = «$a_1 < a_3$?»
Упорядочение$[1101]$ = «$a_1 a_3 a_4 a_2$».
Вопрос$[1100]$ = «$a_1 < a_4$?»
Упорядочение$[11001]$ = «$a_3 a_1 a_4 a_2$».
Упорядочение$[11100]$ = «$a_3 a_4 a_1 a_2$».
Вопрос$[10]$ = «$a_2 < a_3$?»
Вопрос$[101]$ = «$a_4 < a_1$?»
Упорядочение$[1011]$ = «$a_4 a_1 a_2 a_3$».
Вопрос$[1010]$ = «$a_4 < a_2$?»
Упорядочение$[10101]$ = «$a_1 a_4 a_2 a_3$».
Упорядочение$[10100]$ = «$a_1 a_2 a_4 a_3$».
Вопрос$[100]$ = «$a_1 < a_4$?»
Упорядочение$[1001]$ = «$a_1 a_4 a_3 a_2$».
Вопрос$[1000]$ = «$a_1 < a_3$?»
Упорядочение$[10001]$ = «$a_4 a_1 a_3 a_2$».

Упорядочение[10000] = «$a_4a_3a_1a_2$».
Вопрос[0] = «$a_3 < a_4$?»
Вопрос[01] = «$a_1 < a_4$?»
Вопрос[011] = «$a_1 < a_3$?»
Упорядочение[0111] = «$a_2a_1a_3a_4$».
Вопрос[0110] = «$a_2 < a_3$?»
Упорядочение[01101] = «$a_2a_3a_1a_4$».
Упорядочение[01100] = «$a_3a_2a_1a_4$».
Вопрос[010] = «$a_2 < a_3$?»
Упорядочение[0101] = «$a_2a_3a_4a_1$».
Вопрос[0100] = «$a_2 < a_4$?»
Упорядочение[01001] = «$a_3a_2a_4a_1$».
Упорядочение[01100] = «$a_3a_4a_2a_1$».
Вопрос[00] = «$a_1 < a_3$?»
Вопрос[001] = «$a_4 < a_2$?»
Упорядочение[0011] = «$a_4a_2a_1a_3$».
Вопрос[0010] = «$a_4 < a_1$?»
Упорядочение[00101] = «$a_2a_4a_1a_3$».
Упорядочение[00100] = «$a_2a_1a_4a_3$».
Вопрос[000] = «$a_2 < a_4$?»
Упорядочение[0001] = «$a_2a_4a_3a_1$».
Вопрос[0000] = «$a_2 < a_3$?»
Упорядочение[00001] = «$a_4a_2a_3a_1$».
Упорядочение[00000] = «$a_4a_3a_2a_1$».

Так, например, если все ответы были «Нет», то последовательность вопросов и итоговое упорядочение были такими:

Вопрос[Λ] = «$a_1 < a_2$?»
Вопрос[0] = «$a_3 < a_4$?»
Вопрос[00] = «$a_1 < a_3$?»
Вопрос[000] = «$a_2 < a_4$?»
Вопрос[0000] = «$a_2 < a_3$?»
Упорядочение[00000] = «$a_4a_3a_2a_1$».

Ясно, что пяти шагов достаточно в любом случае.

Транспозиции

Транспозицией называется одновременный обмен значений двух элементов массива. Каково минимальное число транспозиций, достаточное для упорядочения по возрастанию любого целочисленного массива из четырех различных элементов?

Ответ. 3.

Решение. Будем, не ограничивая общности, считать, что элементами массива являются числа 1, 2, 3, 4. Обозначим элементы массива a_1, a_2, a_3, a_4 — в соответствии с порядком следования их в массиве. Будем записывать наш массив в виде так называемой подстановки:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь в верхней строке указаны места элементов массива, а в нижней — сами элементы. Будем при этом считать, что $\pi(i) = a_i$ для каждого i от 1 до 4, то есть подстановка «переводит» число i в число a_i. Выберем какое-то число a_{i_1} от 1 до 4. Ясно, что найдется единственное число a_{i_2} (тоже от 1 до 4) такое, что $\pi(a_{i_1}) = a_{i_2}$. Если $a_{i_1} \neq a_{i_2}$, то найдется единственное число a_{i_3} (тоже от 1 до 4) такое, что $\pi(a_{i_2}) = a_{i_3}$, и так далее, пока, наконец, очередное число $a_{i_{l+1}} = \pi(a_{i_l})$ не совпадет с a_{i_1} (заметим, что совпасть с любым числом из списка a_{i_2}, $\ldots$, a_{i_l} число $a_{i_{l+1}}$ не может, так как подстановка разные числа переводит в разные). Тогда будем говорить, что (различные!) числа a_{i_1}, a_{i_2}, $\ldots$, a_{i_l} образуют цикл в подстановке π, а сам этот цикл будем записывать в виде $(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_l})$. Число l при этом будем называть длиной цикла. Каждое число от 1 до 4 из нашей подстановки π принадлежит, что очевидно, ровно одному циклу (возможно, циклу длины 1). Пусть количество всех циклов в подстановке π равно d.

Рассмотрим подстановку, которая получается из подстановки π в результате транспозиции двух различных элементов a_i и a_j. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Числа a_i и a_j лежат в разных циклах $(a_i a_{i_2} \ldots a_{i_l})$ и $(a_j a_{j_2} \ldots a_{j_k})$. Тогда в результате транспозиции элементов a_i и a_j эти циклы сольются в один цикл $(a_i a_{i_2} \ldots a_{i_l} a_j a_{j_2} \ldots a_{j_k})$, а остальные циклы подстановки π сохранятся в новой подстановке. Значит, число циклов уменьшится на 1.

Случай 2. Числа a_i и a_j лежат в одном цикле $(a_i a_{i_2} \ldots a_{i_l} a_j a_{j_2} \ldots a_{j_k})$. Тогда в результате транспозиции элементов a_i и a_j этот цикл разобьётся на два цикла $(a_i a_{i_2} \ldots a_{i_l})$ и $(a_j a_{j_2} \ldots a_{j_k})$, а остальные циклы подстановки π сохранятся в новой подстановке. Значит, число циклов увеличится на 1.

В подстановке e, которая соответствует упорядочению элементов массива по возрастанию, имеется 4 цикла длины 1: (1), (2), (3), (4). Значит (как это следует из рассмотрения случаев 1 и 2), чтобы достичь подстановки e из подстановки π (имеющей d циклов) в результате последовательных транспозиций, необходимо и достаточно $4 - d$ транспозиций, каждая из которых разбивала бы какой-то цикл длины, большей чем один, на два цикла.

Пример подстановки с одним циклом:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

А так как минимальное значение d равно 1, то минимальное число транспозиций, достаточное для упорядочения по возрастанию любого целочисленного массива из четырех различных элементов, равно трём.

Резервуар с перегородкой (вариант 8-го класса)

Резервуар имеет форму куба с горизонтальным дном и разделен на две равные части (левую и правую) вертикальной перегородкой с открывающимися и герметично закрывающимися створками. К левой части резервуара подведена подающая труба, которая заполняет резервуар водой с производительностью 2 декалитра в минуту, в правой части резервуара имеется отводящая труба, которая опустошает резервуар с производительностью 3 декалитра в минуту. В начальный момент створки перегородки закрыты, резервуар пуст, и через подающую трубу начинает поступать вода. При этом створки открываются и закрываются в следующей последовательности: три минуты створки закрыты, затем минуту открыты, затем снова три минуты закрыты, затем минуту открыты, и так далее. Укажите минимальное количество минут, достаточное для того, чтобы в левой части резервуара оказалось бы 10,375 декалитров. Считать, что створки открываются и закрываются мгновенно, уровень воды в половинках резервуара при открытии створок выравнивается мгновенно, отводящая труба за достаточное время может полностью опустошить резервуар с открытыми створками.

Ответ. 15 минут.

Решение. За первые 3 минуты в левую часть резервуара нальется 6 декалитров воды, затем створки откроются, и за следующую минуту из резервуара вытечет 1 декалитр воды, после закрытия створок в левой части останется половина имевшейся жидкости — 2,5 декалитра (столько же окажется в правой части, — вся эта вода вытечет из правой части за следующие три минуты при закрытых створках). За 5–7 минуты количество воды в левой части резервуара увеличится до 8,5 декалитров, за 8-ю минуту из резервуара вытечет 1 декалитр воды, после закрытия створок в левой части останется половина имевшейся жидкости — 3,75 декалитра (столько же окажется в правой части, — вся эта вода вытечет из правой части за следующие три минуты при закрытых створках). Абсолютно аналогично за 9-11 минуты количество воды в левой части резервуара увеличится до 9,75 декалитров, за 12-ю минуту из резервуара вытечет 1 декалитр воды, по истечении 12-й минуты в левой и правой частях будет по 4,375 декалитров. Еще через 3 минуты в левой части резервуара впервые окажется 10, 375 декалитров воды. От начального момента пройдет 15 минут.

Резервуар с перегородкой (вариант 9-го и 10-го классов)

Резервуар имеет форму куба с горизонтальным дном и разделен на две равные части (левую и правую) вертикальной перегородкой с открывающимися и герметично закрывающимися створками. К левой части резервуара подведена подающая труба, которая заполняет резервуар водой с производительностью 2 декалитра в минуту, в правой части резервуара имеется отводящая труба, которая опустошает резервуар с производительностью 3 декалитра в минуту. В начальный момент створки перегородки закрыты, резервуар пуст, и через подающую трубу начинает поступать вода. При этом створки открываются и закрываются в следующей последовательности: три минуты створки закрыты, затем минуту открыты, затем снова три минуты закрыты, затем минуту открыты, и так далее. Укажите минимальное количество минут, достаточное для того, чтобы в левой части резервуара оказалось бы $11 - \frac{5}{2^{64}}$ декалитров. Считать, что створки открываются и закрываются мгновенно, уровень воды в половинках резервуара при открытии створок выравнивается мгновенно, отводящая труба за достаточное время может полностью опустошить резервуар с открытыми створками.

Ответ. 259 минут.

Решение. Докажем индукцией по t ($t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), что через $4t+3$ минут от начального момента в левой части резервуара впервые окажется ровно $V_t = 11 - \frac{5}{2^t}$ декалитров воды.

Базис индукции. $t = 0$. За первые 3 минуты ($3 = 4 \cdot 0 + 3$) в левую часть резервуара нальется 6 декалитров воды; $6 = 11 - \frac{5}{2^0}$, — базис индукции установлен.

Предположение индукции. Пусть при $t = t'$ через $4t+3$ минут от начального мемента в левой части резервуара впервые окажется ровно $V_t = 11 - \frac{5}{2^t}$ декалитров воды (то есть $V_{t'} = 11 - \frac{5}{2^{t'}}$).

Шаг индукции. Докажем, что при $t = t'+1$ через $4(t'+1)+3 = 4t'+7$ минут от начального мемента в левой части резервуара впервые окажется ровно $V_{t'+1} = 11 - \frac{5}{2^{t'+1}}$ декалитров воды.

По предположению индукции через $4t'+3$ минут от начального мемента в левой части резервуара впервые оказалось ровно $V_{t'} = 11 - \frac{5}{2^{t'}}$ декалитров воды. Затем створки на минуту открылись, за $(4t'+4)$-ю минуту из резервуара вытечет 1 декалитр воды, после закрытия створок в левой части останется половина имевшейся жидкости — $5 - \frac{5}{2^{t'+1}}$ декалитров (столько же окажется в правой части, — вся эта вода вытечет из правой части за следующие три минуты при закрытых створках). Через те же 3 минуты в левую часть резервуара нальется 6 декалитров и там впервые окажется $11 - \frac{5}{2^{t'+1}} = V_{t'+1}$ декалитров воды, что и требовалось доказать.

Остается лишь заметить, что ровно через $4 \cdot 64 + 3 = 259$ минут от начального момента в левой части резервуара впервые окажется $11 - \frac{5}{2^{64}}$ декалитров воды.

Треугольники в квадрате

Пусть S — минимальная площадь квадрата, внутри которого без наложений можно разместить два равносторонних треугольника со стороной 2 (наличие общей части границы у треугольников допускается). В ответе укажите наименьшее целое число, большее или равное S.

Ответ. 6.

Решение. *Верхняя оценка.* Верхняя оценка непосредственно следует из чертежа (см. рис. 1). $\triangle AEF$ и $\triangle CEF$ — равносторонние треугольники со стороной 2, $ABCD$ — вмещающий их квадрат, O — точка пересечения диагоналей квадрата и середина стороны EF каждого из треугольников. Заметим: AO — медиана равностороннего треугольника и половина диагонали квадрата. Значит, если длину стороны квадрата обозначить через b, то

$$\frac{b}{\sqrt{2}} = AO = \sqrt{AE^2 - EO^2} = \sqrt{3},$$

откуда $b = \sqrt{6}$, а площадь квадрата $ABCD$ равна 6.

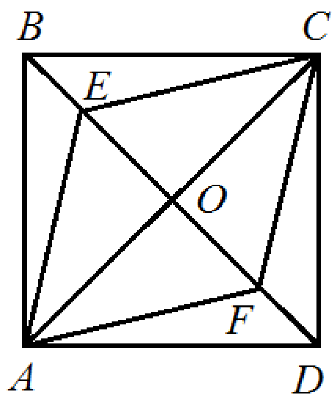

Рис. 1.

Нижняя оценка. Обозначим через b длину стороны квадрата $ABCD$ минимальной площади, вмещающего без наложений два равносторонних треугольника со стороной 2. Пусть O — точка пересечения диагоналей квадрата. Точка O находится от любой точки квадрата на расстоянии, не превосходящем $\frac{b}{\sqrt{2}}$. Если $\sqrt{3} > \frac{b}{\sqrt{2}}$, то точка O может лежать лишь внутри любого из равносторонних треугольников, размещенных в квадрате $ABCD$. Пусть это не так. Тогда найдется равносторонний треугольник $\triangle PQR$, размещенный в квадрате $ABCD$ и такой, что точка O лежит или на стороне этого треугольника, или вне этого треугольника. Нетрудно заметить, что в последнем случае можно так передвинуть $\triangle PQR$, что он не выйдет за пределы квадрата, а точка O окажется на стороне этого треугольника. Но тогда расстояние от той вершины треугольника, которая не лежит хоть на какой-нибудь стороне треугольника, содержащей точку O, будет не меньше чем $\sqrt{3}$ (это — кратчайшее расстояние от вершины до точки на противоположной стороне равностороннего треугольника со стороной 2) и, следовательно, больше чем $\frac{b}{\sqrt{2}}$. Получается, что указанная вершина треугольника не может лежать в квадрате $ABCD$. Значит, точка O лежит в любом из расположенных внутри квадрата $ABCD$ равностороннем треугольнике со стороной 2, и два таких треугольника нельзя разместить там без наложений. Обнаруженное противоречие доказывает нижнюю оценку: $\sqrt{3} \leq \frac{b}{\sqrt{2}}$, то есть $b \geq \sqrt{6}$, $S(ABCD) \geq 6$.

От перемены мест слагаемых...

В уравнении ВМК + ВМК + $\cdots$ + ВМК = МГУ одинаковые буквы соответствуют равным цифрам, а разные — разным. Какое

а) наименьшее и

б) наибольшее

количество слагаемых может быть в левой части этого равенства?

Ответ. а) 2, б) 5.

Решение. а) Ясно, что одного слагаемого в левой части быть не может. Возможность двух слагаемых дается примером $123 + 123 = 246$.

б) Пример с пятью слагаемыми существует:

$$192 + 192 + 192 + 192 + 192 = 960.$$

Предположим, что имеется пример с не менее чем шестью слагаемыми. Тогда каждое из слагаемых (ВМК) не меньше 100 и не больше 166, и, значит, сумма (МГУ) не меньше 600 и не больше 996. Вторая цифра слагаемого (буква М) должна являться первой цифрой суммы, следовательно, она может быть равна только шести. Но тогда слагаемое лежит в пределах от 160 до 169, а сумма не меньше 960, что исключает цифру 6 в качестве буквы М в исходном выражении. Пришли к противоречию. Значит, максимальное число слагаемых в сумме равно 5.

Разноцветные числа

Художник Тюбик хочет раскрасить все числа от 1 до 2014 так, что если разность чисел равна 3, 4 или 8, то они разного цвета. Какое наименьшее число цветов понадобится Тюбику?

Ответ. 3.

Решение. Рассмотрим числа 1, 5, 9. Никакая пара из них не может быть раскрашена в один цвет по условию, значит, менее чем тремя цветами Тюбику не обойтись. Оказывается, трёх цветов хватит. Чтобы это показать, заметим, что достаточно раскрасить в 3 цвета по указанным правилам числа от 0 до 11, — произвольное число от 1 до 2014 при этом будет иметь такой же цвет, как и его остаток от деления на 12. Приведём требуемую раскраску (в верхней строке указан остаток от деления числа на 12, в нижней под остатком — число от 1 до 3, изображающее цвет данного остатка):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сколько решений?

Сколько существует различных троек чисел $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + 4x + 4y + 4z + 6 = 0?$$

- Ни одной.
- $\triangleright$ Одна.
- Две.
- Три.
- Четыре.
- Бесконечно много.

Решение. Преобразуем исходное уравнение равносильным образом:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 8x + 8y + 8z + 12 = 0,$$

$$(x^2+y^2+4+2xy+4x+4y)+(x^2+z^2+4+2xz+4x+4z)+(y^2+z^2+4+2yz+4y+4z) = 0,$$

$$(x+y+2)^2 + (x+z+2)^2 + (y+z+2)^2 = 0,$$

$$\begin{cases} x+y+2=0, \\ x+z+2=0, \\ y+z+2=0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-1, \\ y=-1, \\ z=-1. \end{cases}$$