Олимпиада школьников
по прикладной математике и информатике
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова

Заочный тур.

21 марта 2015 года

8-9 классы

Правильные ответы помечены «▷».

Задачи по информатике

Карта

В окрестностях Баскервилль-Холла в изобилии встречаются торфяные болота, поэтому среди соседних селений не всегда имеется прямое сообщение, иногда приходится выбирать магистральное шоссе. В руки доктору Джону Ватсону попал план, в котором попарно перечислены те из соседних селений, между которыми есть (всегда двусторонний) путь. Среди соседних селений нет изолированных. Проверьте по этому плану, есть ли какой-то путь между любыми двумя соседними селениями, минующий магистральное шоссе:
Бат – Хитроу
Бат – Маузел
Стоктон – Маузел
Бат – Ипсуич
Ипсуич – Стоктон
Лидс – Норич

- ▷ Нет.
- Да.

Пояснение. Если начать с произвольного пункта, и добавлять в список все пункты, с ним связанные, а потом все, связанные с ними, и т. д., то в какой-то момент очередное добавление списка не увеличит. Если при этом получится полный список, значит, из любого пункта можно попасть в любой, а если неполный, то нельзя.

Карта

В окрестностях Крабовидной туманности в изобилии встречаются чёрные дыры, поэтому среди близлежащих галактик не всегда имеется прямое сообщение, иногда приходится выбирать подпространство. В руки капитану Роджеру Вилко попал план, в котором попарно перечислены те из близлежащих галактик, между которыми есть (всегда двусторонний) путь. Среди близлежащих галактик нет изолированных. Проверьте по этому плану, есть ли какой-то путь между любыми двумя близлежащими галактиками, минующий подпространство:
Сардак – Шо
Бребру – Хтыр
Зум-Зум – Йалейа
Зум-Зум – Оаиоу
Йалейа – Сардак
Сардак – Оаиоу

- Да.
- ▷ Нет.

Пояснение. Если начать с произвольного пункта, и добавлять в список все пункты, с ним связанные, а потом все, связанные с ними, и т. д., то в какой-то момент очередное добавление списка не увеличит. Если при этом получится полный список, значит, из любого пункта можно попасть в любой, а если неполный, то нельзя.

Карта

В окрестностях Пустопорожней волости в изобилии встречаются медвежьи углы, поэтому среди волостных сёл и деревень не всегда имеется прямое сообщение, иногда приходится выбирать Пустопорожний тракт. В руки путешественнику Павлу Веретенникову попал план, в котором попарно перечислены те из волостных сёл и деревень, между которыми есть (всегда двусторонний) путь. Среди волостных сёл и деревень нет изолированных. Проверьте по этому плану, есть ли какой-то путь между любыми двумя волостными поселениями, минующий Пустопорожний тракт:
Горелово – Знобишино
Заплатово – Неурожайка
Дырявино – Неелово
Неурожайка – Дырявино
Горелово – Неурожайка

Неелово – Заплатово
Неурожайка – Разутово

- Нет.
- ▷ Да.

Пояснение. Если начать с произвольного пункта, и добавлять в список все пункты, с ним связанные, а потом все, связанные с ними, и т. д., то в какой-то момент очередное добавление списка не увеличит. Если при этом получится полный список, значит, из любого пункта можно попасть в любой, а если неполный, то нельзя.

Робот

Язык управления кондитерским укладчиком «Печенег» включает в себя следующие команды:

```
">" - продвинутся на шаг вперёд;
"<" - продвинуться на шаг назад;
"@" - взять печенье;
"&" - уложить печенье;\\
"L" - повернуть против часовой стрелки на 90 градусов;
"R" - повернуть по часовой стрелке на 90 градусов;
"число*(последовательность команд)" - выполнить
последовательность команд «число» раз.
```

Находясь в гараже, «Печенег» получил следующую программу:

```
L @ L L < < L R > 3*(R > & L L < @ <) L L < & R > R R
```

Сколько шагов до гаража необходимо ему сделать после выполнения программы (повороты не в счёт)?

Ответ: 4.

Пояснение. Если просто выполнять все действия робота на координатной плоскости (два из них вообще не несут нагрузки, и не забываем, что поворот меняет интерпретацию команд), он в конце концов переместится из точки с координатами (0 шагов, 0 шагов) в точку (M шагов, N шагов). Ответ — сумма модулей M и N.

Робот

Язык управления автоматическим свистуном «Зинзивер» включает в себя следующие команды:

```
"=>" - продвинутся на шаг вперёд;
"<=" - продвинуться на шаг назад;
"^" - свистнуть;
"_" - прогудеть басом;
"+" - повернуть против часовой стрелки на 90°;
"-" - повернуть по часовой стрелке на 90°;
"число*(последовательность команд)" - выполнить
последовательность команд «число» раз.
```

Находясь в гараже, «Зинзивер» получил следующую программу:

```
+ ^ => => => 3*(<= - ^ + <= - _ =>) => <= => => - _
```

Сколько шагов до гаража необходимо ему сделать после выполнения программы (повороты не в счёт)?

Ответ: 6.

Пояснение. Если просто выполнять все действия робота на координатной плоскости (два из них вообще не несут нагрузки, и не забываем, что поворот меняет интерпретацию команд), он в конце концов переместится из точки с координатами (0 шагов, 0 шагов) в точку (M шагов, N шагов). Ответ — сумма модулей M и N.

Таинственный дневник

Впечатлительный пенсионер Венимамин написал заметку в своём дневнике, используя простой подстановочный шифр (латинским буквам и цифрам взаимно однозначно соответствуют русские, буква «ё» не используется). К счастью, пенсионер Венимамин скрупулёзно расставил пробелы и знаки препинания, не заменяя их. Расшифруйте эту заметку (ответ записывается БОЛЬШИМИ БУКВАМИ), если известна последняя буква первого слова: «И».

hfehdb nmhab npbkm fqkjqehni hcoch achq. ahc-hc kq ghc chlehbh!

Ответ: ТРЕТЬИ СУТКИ СНИЗУ РАЗДАЕТСЯ ТОПОТ КОТА. КТО-ТО ЗА ЭТО ОТВЕТИТ!

Пояснение. Сообщения подобраны так, чтобы расшифровать их можно было последовательно, отталкиваясь от определённых слов, которые можно уверенно расшифровать по внешнему виду, и подставляя полученные буквы в другие слова (отсюда и несколько причудливые формулировки). В данном варианте это слово „ahc-hc“ - „кто-то“ (альтернатива „что-то“ приводит к невозможному сочетанию букв).

Таинственный дневник

Любознательный зоолог Бенедикт внёс наблюдение в своём дневнике, используя простой подстановочный шифр (латинским буквам и цифрам взаимно однозначно соответствуют русские, буква «ё» не используется). К счастью, зоолог Бенедикт скрупулёзно расставил пробелы и знаки препинания, не заменяя их. Расшифруйте это наблюдение (ответ записывается БОЛЬШИМИ БУКВАМИ), если известна первая буква четвёртого слова: «О».

nbjcr o erkjifm hcmr-ekjjjqr. hl spjqrji nsjgh dh qnj ekjf n qjla.

Ответ: ВЧЕРА Я ЗАМЕТИЛ ОРЛА-ЗМЕЕЕДА. ОН СЪЕДАЕТ ВСЕГО ПО ДВЕ ЗМЕИ В ДЕНЬ.

Пояснение. Сообщения подобраны так, чтобы расшифровать их можно было последовательно, отталкиваясь от определённых слов, которые можно уверенно расшифровать по внешнему виду, и подставляя полученные буквы в другие слова (отсюда и несколько причудливые формулировки). В данном варианте это слово „ekjjjqr“ („змееeда“).

Таинственный дневник

Влюблённый студент Аристарх сделал запись в своём дневнике, используя простой подстановочный шифр (латинским буквам и цифрам взаимно однозначно соответствуют русские, буква «ё» не используется). К счастью, студент Аристарх скрупулёзно расставил пробелы и знаки препинания, не заменяя их. Расшифруйте эту запись (ответ записывается БОЛЬШИМИ БУКВАМИ), если известна первая буква девятого слова: «В».

pqp bj fhj jj hj lcogae? njke ihq ndjm hq dnjaj fgljj g olgbj!

Ответ: КАК ЖЕ МНЕ ЕЕ НЕ ЛЮБИТЬ? ВЕДЬ ОНА ВСЕХ НА СВЕТЕ МИЛЕЕ И БЛИЖЕ!

Пояснение. Сообщения подобраны так, чтобы расшифровать их можно было последовательно, отталкиваясь от определённых слов, которые можно уверенно расшифровать по внешнему виду, и подставляя полученные буквы в другие слова (отсюда и несколько причудливые формулировки). В данном варианте это слово „jj“ („её“ без буквы „ё“, то есть, строго говоря, „ее“).

Задачи по математике

Ребус

Решить ребус (одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам, разные — разным, буква в левой части может обозначать цифру, встречающуюся в правой):

$$\text{Г} \cdot \text{АМ} \cdot \text{МА} = 2015.$$

Пусть γ — это число ГАММА, цифры которого соответствуют одному из решений ребуса. В ответ запишите сумму всех подходящих γ.

Ответ: 104 444.

Решение.

Разложение числа 2015 на простые множители имеет вид $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Поскольку Г — однозначное натуральное число и делитель числа 2015, то Г $= 1$ или Г $= 5$.

Если Г $= 1$, то АМ $\cdot$ МА $= 2015$, откуда следует, что АМ и МА — два различных двузначных делителя числа 2015. Такими делителями являются только числа 13, 31 и 65. Из трех попарных произведений только одно равно 2015. Это произведение чисел 31 и 65, но оно не подходит в силу того, что число 31 не получается из числа 65 перестановкой цифр.

Итак, Г $= 5$, а значит, АМ $\cdot$ МА $= 403 = 13 \cdot 31 = 31 \cdot 13$. Ребус имеет два решения: $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$ и $5 \cdot 31 \cdot 13 = 2015$.

В итоге $\gamma = 51331 + 53113 = 104\,444$.

Тороидальные шахматы

У шахматной доски 26×26 склеили левый и правый край, а также верхний и нижний край. Какое минимальное число ходов нужно сделать шахматному королю, чтобы теперь попасть с поля $h6$ на поле $w25$?

Ответ: 11.

Решение. Приведем возможный путь шахматного короля из 11 ходов: $h6 - g5 - f4 - e3 - d2 - c1 - b26 - a25 - z25 - y25 - x25 - w25$.

Докажем, что меньше, чем за 11 ходов, королю с поля $h6$ на поле $w25$ не добраться. Действительно, вертикаль «h» является 8-й вертикалью, а вертикаль «w» — 23-й. Почти всегда за каждый ход номер текущей вертикали (т. е., вертикали, в которой находится король) изменяется не более, чем на 1. Исключение — ситуация, когда король за один ход с самой левой (1-й) вертикали попадает на самую правую (26-ю), или наоборот. Поэтому для того, чтобы попасть с вертикали «h» на вертикаль «w», королю понадобится не менее, чем $\min(23 - 8, 8 - 23 + 26) = \min(15, 11) = 11$ ходов.

Взвешивания

За какое минимальное число взвешиваний можно отмерить 900 г сахарного песка с помощью двухчашечных весов с одной гирей 200 г из пакета, в котором 3 кг сахарного песка?

Ответ: 2.

Решение. Очевидно, за одно взвешивание с поставленной задачей не справиться. Покажем, как это сделать за два взвешивания.

1. Положим на одну чашу весов гирю 200 г, а весь сахар распределим по чашам весов так, чтобы они уравновесились. Тогда на одной чаше будет 1600 г, а на другой — 1400 г сахара.

2. Теперь высыпем 1400 г сахара обратно в мешок, гирю 200 г оставим на чаше весов, а оставшиеся 1600 г уравновесим на весах аналогично первому взвешиванию. Тогда на чаше весов, на которой не было гири, будет 900 г сахара.

Взвешивания

За какое минимальное число взвешиваний можно отмерить 650 г сахарного песка с помощью двухчашечных весов с одной гирей 200 г из пакета, в котором 3 кг сахарного песка?

Ответ: 2.

Решение. Очевидно, за одно взвешивание с поставленной задачей не справиться. Покажем, как это сделать за два взвешивания.

1. Распределим весь сахар по чашам весов так, чтобы они уравновесились. Тогда на каждой чаше будет 1500 г сахара.

2. Теперь высыпем с одной чаши весь сахар обратно в мешок и положим на нее гирю 200 г. Оставшиеся 1500 г уравновесим на весах. Тогда на чаше весов, на которой лежала гиря, будет 650 г сахара.

Рекламная акция

Мария Ивановна выдала Вовочке деньги на покупку 33 фломастеров для всех учеников класса. В магазине выяснилось, что согласно рекламной акции с покупки набора из 12 фломастеров возвращается 25% суммы чека, а при покупке набора из 6 фломастеров — 20%. Какое максимальное число фломастеров может купить Вовочка?

Ответ: 43.

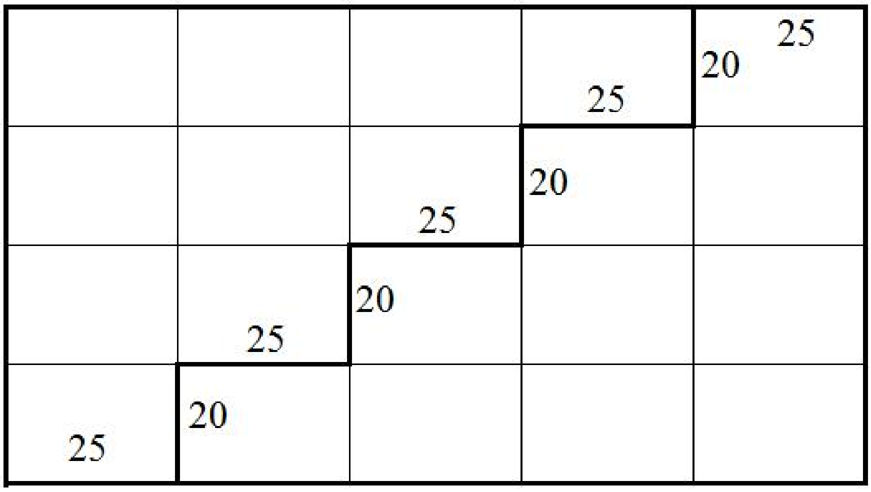
Решение. Ясно, что если в некоторый момент у Вовочки имеются средства на покупку 12 фломастеров, то ему лучше покупать набор из 12 фломастеров, чем два набора по 6 фломастеров (25% больше, чем 20%). Поэтому, чтобы приобрести в итоге наибольшее число фломастеров, сначала Вовочка должен купить два набора по 12 фломастеров. При этом ему согласно акции вернут деньги на покупку 6 дополнительных фломастеров. Поэтому в этот момент у Вовочки будут деньги на покупку $33 - 2 \cdot 12 + 6 = 15$ фломастеров. Стало быть, Вовочка покупает еще один набор из 12 фломастеров, и ему возвращают по акции деньги на 3 дополнительных фломастера. Осталось купить еще набор из 6 фломастеров и на вырученные деньги (на покупку $6/5$ фломастера) купить еще один фломастер. При этом у Вовочки останется сдача, равная $1/5$ стоимости одного фломастера.

Итак, всего удалось купить $3 \cdot 12 + 1 \cdot 6 + 1 = 43$ фломастера.

Разрезания

На какое наименьшее число частей можно разрезать прямоугольник 125×80, чтобы из них можно было собрать квадрат 100×100?

Ответ: 2.



Решение. Ясно, что частей не меньше двух. Искомое разрезание прямоугольника на две части см. на рисунке.

Парламент

Лжецы всегда врут, НеЛжецы всегда говорят правду. В парламенте 100 депутатов. Первый сказал: „Среди нас по крайней мере один лжец“, второй: „Среди нас по крайней мере два лжеца“, и т.д., сотый сказал: „Среди нас по крайней мере сто лжецов“.

Сколько лжецов среди депутатов?

Ответ: 50.

Решение. Очевидно, если $1 \leqslant i < j \leqslant 100$ и i-й депутат солгал, то j-й депутат тоже солгал. Значит, найдется такое $0 \leqslant k \leqslant 100$, что первые k депутатов сказали правду, а остальные (последние) $(100 - k)$ депутатов солгали. Значит, верно, что среди 100 депутатов по крайней мере k лжецов и неверно, что среди них по крайней мере $(k + 1)$ лжецов. Значит, лжецов ровно k, причем это число равно $(100 - k)$. Отсюда $k = 50$.

Сколько?

Среди чисел $1, 2, \ldots, 1000$ найти количество чисел, которые делятся на 6 или не делятся на 15.

Ответ: 967.

Решение. Легко видеть, что для любых натуральных чисел n и k среди чисел 1, 2, ..., n есть ровно $[n/k]$ чисел, которые делятся на k.

Искомое количество получается, если из всех 1000 чисел вычеркнуть те, которые делятся на 15, но не делятся на 6. Осталось заметить, что, поскольку НОК(6, 15) $= 30$, среди $[1000/15] = 66$ чисел, которые делятся на 15, каждое второе делится на 6.

В итоге, ровно $1000 - 66/2 = 967$ чисел удовлетворяет условию задачи.

Уравнение в целых числах

Сколько различных пар целых чисел (x, y) удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}?$$

Ответ: 53.

Решение. Перенесем все в левую часть и приведем все дроби к общему знаменателю. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2015(x+y) & = & xy \\ xy & \neq & 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что уравнение системы приводится к виду

$$(x-2015)(y-2015) = 2015^2,$$

где $2015^2 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2$ есть разложение числа 2015^2 на простые множители.

Поскольку в разложении любого натурального делителя числа 2015^2 на простые множители числа 5, 13 и 31 могут встречаться в степенях 0, 1 или 2, число 2015^2 имеет ровно $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ *натуральных* делителей, а значит, *целых* делителей будет в два раза больше.

Таким образом, имеем ровно 54 возможных целых значений для выражения $(x - 2015)$, причем в каждом случае $(y - 2015)$ ищется однозначно как $\frac{2015^2}{x-2015}$.

Значит, уравнение системы имеет ровно 54 решения, из которых только одно решение (а именно, решение $(0, 0)$) не удовлетворяет неравенству системы.

Уравнение в целых числах

Сколько различных пар целых чисел (x, y) удовлетворяют уравнению

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}?$$

Ответ: 107.

Решение. Перенесем все в левую часть и приведем все дроби к общему знаменателю. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2015(x+2y) & = & xy \\ xy & \neq & 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что уравнение системы приводится к виду

$$(x-2\cdot 2015)(y-2015)=2\cdot 2015^2,$$

где $2\cdot 2015^2 = 2\cdot 5^2\cdot 13^2\cdot 31^2$ есть разложение числа $2\cdot 2015^2$ на простые множители.

Поскольку в разложении любого натурального делителя числа $2\cdot 2015^2$ на простые множители числа 5, 13 и 31 могут встречаться в степенях 0, 1 или 2, а число 2 — в степенях 0 или 1, число $2\cdot 2015^2$ имеет ровно $2\cdot 3\cdot 3\cdot 3=54$ *натуральных* делителей, а значит, *целых* делителей будет в два раза больше.

Таким образом, имеем 108 возможных целых значений для выражения $(x-2\cdot 2015)$, причем в каждом случае $(y-2015)$ ищется однозначно как $\frac{2\cdot 2015^2}{x-2\cdot 2015}$.

Значит, уравнение системы имеет ровно 108 решений, из которых только одно решение (а именно, решение $(0,0)$) не удовлетворяет неравенству системы.

Уравнение в целых числах

Сколько различных пар целых чисел (x,y) удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=\frac{1}{2015}?$$

Ответ: 107.

Решение. Перенесем все в левую часть и приведем все дроби к общему знаменателю. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2015(3x+y) & = & xy \\ xy & \neq & 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что уравнение системы приводится к виду

$$(x-2015)(y-3\cdot 2015)=3\cdot 2015^2,$$

где $3\cdot 2015^2 = 3\cdot 5^2\cdot 13^2\cdot 31^2$ есть разложение числа $3\cdot 2015^2$ на простые множители.

Поскольку в разложении любого натурального делителя числа $3\cdot 2015^2$ на простые множители числа 5, 13 и 31 могут встречаться в степенях 0, 1 или

2, а число 3 — в степенях 0 или 1, число $3 \cdot 2015^2$ имеет ровно $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ *натуральных* делителей, а значит, *целых* делителей будет в два раза больше.

Таким образом, имеем 108 возможных целых значений для выражения $(x - 2015)$, причем в каждом случае $(y - 3 \cdot 2015)$ ищется однозначно как $\frac{3 \cdot 2015^2}{x-2015}$.

Значит, уравнение системы имеет ровно 108 решений, из которых только одно решение (а именно, решение $(0, 0)$) не удовлетворяет неравенству системы.

Уравнение в целых числах

Сколько различных пар целых чисел (x, y) удовлетворяют уравнению

$$\frac{5}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}?$$

Ответ: 71.

Решение. Перенесем все в левую часть и приведем все дроби к общему знаменателю. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2015(x + 5y) & = & xy \\ xy & \neq & 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что уравнение системы приводится к виду

$$(x - 5 \cdot 2015)(y - 2015) = 5 \cdot 2015^2,$$

где $5 \cdot 2015^2 = 5^3 \cdot 13^2 \cdot 31^2$ есть разложение числа $5 \cdot 2015^2$ на простые множители.

Поскольку в разложении любого натурального делителя числа $5 \cdot 2015^2$ на простые множители числа 13 и 31 могут встречаться в степенях 0, 1 или 2, а число 5 — в степенях 0, 1, 2 или 3, число $5 \cdot 2015^2$ имеет ровно $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ *натуральных* делителей, а значит, *целых* делителей будет в два раза больше.

Таким образом, имеем 72 возможных значений для выражения $(x - 5 \cdot 2015)$, причем в каждом случае $(y - 2015)$ ищется однозначно как $\frac{5 \cdot 2015^2}{x - 5 \cdot 2015}$.

Значит, уравнение системы имеет ровно 72 решения, из которых только одно решение (а именно, решение $(0, 0)$) не удовлетворяет неравенству системы.

Олимпиада школьников
по прикладной математике и информатике
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова

Заочный тур.

21 марта 2015 года

10 класс

Правильные ответы помечены «▷».

Задачи по информатике

Робот

Язык управления кондитерским укладчиком «Печенег» включает в себя следующие команды:

```
">" - продвинутся на шаг вперёд;
"<" - продвинуться на шаг назад;
"@" - взять печенье;
"&" - уложить печеье;\\
"L" - повернуть против часовой стрелки на 90 градусов;
"R" - повернуть по часовой стрелке на 90 градусов;
"число*(последовательность команд)" - выполнить
последовательность команд «число» раз.
```

Находясь в гараже, «Печенег» получил следующую программу:

```
L @ L L < < L R > 3*(R > & L L < @ <) L L < & R > R R
```

Сколько шагов до гаража необходимо ему сделать после выполнения программы (повороты не в счёт)?

Ответ: 4.

Пояснение. Если просто выполнять все действия робота на координатной плоскости (два из них вообще не несут нагрузки, и не забываем, что поворот меняет интерпретацию команд), он в конце концов переместится из точки с координатами (0 шагов, 0 шагов) в точку (M шагов, N шагов). Ответ — сумма модулей M и N.

Робот

Язык управления автоматическим свистуном «Зинзивер» включает в себя следующие команды:

```
"=>" - продвинутся на шаг вперёд;
"<=" - продвинуться на шаг назад;
"^" - свистнуть;
"_" - прогудеть басом;
"+" - повернуть против часовой стрелки на 90°;
"-" - повернуть по часовой стрелке на 90°;
"число*(последовательность команд)" - выполнить
последовательность команд «число» раз.
```

Находясь в гараже, «Зинзивер» получил следующую программу:

```
+ ^ => => => 3*(<= - ^ + <= - _ =>) => <= => => - _
```

Сколько шагов до гаража необходимо ему сделать после выполнения программы (повороты не в счёт)?

Ответ: 6.

Пояснение. Если просто выполнять все действия робота на координатной плоскости (два из них вообще не несут нагрузки, и не забываем, что поворот меняет интерпретацию команд), он в конце концов переместится из точки с координатами (0 шагов, 0 шагов) в точку (M шагов, N шагов). Ответ — сумма модулей M и N.

Принтер

Сколько точек растра по горизонтали может быть в изображении формата JPEG, чтобы при печати на чёрно-белом принтере разрешения 600 dpi ширина этого изображения составляла 120 миллиметров (с точностью до одного-двух миллиметров)?

- ▷ 2834.
- 7200.
- Размер может быть любой.
- 120.

Пояснение. Это просто арифметическая задача. DPI — это “dots per inch”, количество точек на один дюйм. А нам надо узнать количество точек на определённое число миллиметров. Делим на количество миллиметров в дюйме, умножаем на ширину в миллиметрах.

Принтер

Сколько точек растра по горизонтали может быть в изображении формата GIF, чтобы при печати на чёрно-белом принтере разрешения 300 dpi ширина этого изображения составляла 100 миллиметров (с точностью до одного-двух миллиметров)?

- 2540.
- ▷ 1181.
- 100.
- 3000.

Пояснение. Это просто арифметическая задача. DPI — это "dots per inch", количество точек на один дюйм. А нам надо узнать количество точек на определённое число миллиметров. Делим на количество миллиметров в дюйме, умножаем на ширину в миллиметрах.

Принтер

Сколько точек растра по горизонтали может быть в изображении формата PNG, чтобы при печати на чёрно-белом принтере разрешения 150 dpi ширина этого изображения составляла 200 миллиметров (с точностью до одного-двух миллиметров)?

- ▷ 1181.
- 200.
- 100.
- 3000.

Пояснение. Это просто арифметическая задача. DPI — это "dots per inch", количество точек на один дюйм. А нам надо узнать количество точек на определённое число миллиметров. Делим на количество миллиметров в дюйме, умножаем на ширину в миллиметрах.

Принтер

Сколько точек растра по горизонтали может быть в изображении формата TIFF, чтобы при печати на чёрно-белом принтере разрешения 100 dpi ширина этого изображения составляла 180 миллиметров (с точностью до одного-двух миллиметров)?

- 1800.
- ▷ 708.
- Данные в TIFF сжаты, поэтому вычислить нельзя.
- 7086.

Пояснение. Это просто арифметическая задача. DPI — это “dots per inch”, количество точек на один дюйм. А нам надо узнать количество точек на определённое число миллиметров. Делим на количество миллиметров в дюйме, умножаем на ширину в миллиметрах.

Принтер

Сколько точек растра по горизонтали может быть в изображении формата PCX, чтобы при печати на чёрно-белом принтере разрешения 1200 dpi ширина этого изображения составляла 80 миллиметров (с точностью до одного-двух миллиметров)?

- Размер точки на принтере неизвестен, вычислить невозможно.
- 80.
- ▷ 3779.
- Данные в PCX сжаты, поэтому вычислить нельзя.

Пояснение. Это просто арифметическая задача. DPI — это “dots per inch”, количество точек на один дюйм. А нам надо узнать количество точек на определённое число миллиметров. Делим на количество миллиметров в дюйме, умножаем на ширину в миллиметрах.

Принтер

Сколько точек растра по горизонтали может быть в изображении формата BMP, чтобы при печати на чёрно-белом принтере разрешения 400 dpi ширина этого изображения составляла 150 миллиметров (с точностью до одного-двух миллиметров)?

- Размер точки на принтере неизвестен, вычислить невозможно.
- 6000.
- ▷ 2362.
- Данные в BMP сжаты, поэтому вычислить нельзя.

Пояснение. Это просто арифметическая задача. DPI — это "dots per inch", количество точек на один дюйм. А нам надо узнать количество точек на определённое число миллиметров. Делим на количество миллиметров в дюйме, умножаем на ширину в миллиметрах.

Дневник с секретом

Впечатлительный пенсионер Венимамин написал заметку в своём дневнике, используя простой подстановочный шифр (латинским буквам и цифрам взаимно однозначно соответствуют русские, буква «ё» не используется). К счастью, пенсионер Венимамин скрупулёзно расставил пробелы и знаки препинания, не заменяя их. Расшифруйте эту заметку (ответ записывается БОЛЬШИМИ БУКВАМИ).

hfehdb nmhab npbkm fqkjqehni hcoch achq. ahc-hc kq ghc chlehbh!

Ответ: ТРЕТЬИ СУТКИ СНИЗУ РАЗДАЕТСЯ ТОПОТ КОТА. КТО-ТО ЗА ЭТО ОТВЕТИТ!

Пояснение. Сообщения подобраны так, чтобы расшифровать их можно было последовательно, отталкиваясь от определённых слов, которые можно уверенно расшифровать по внешнему виду, и подставляя полученные буквы в другие слова (отсюда и несколько причудливые формулировки). В данном варианте это слово „ahc-hc" - „кто-то" (альтернатива „что-то" приводит к невозможному сочетанию букв).

Дневник с секретом

Любознательный зоолог Бенедикт внёс наблюдение в своём дневнике, используя простой подстановочный шифр (латинским буквам и цифрам взаимно однозначно соответствуют русские, буква «ё» не используется). К счастью, зоолог Бенедикт скрупулёзно расставил пробелы и знаки препинания, не заменяя их. Расшифруйте это наблюдение (ответ записывается БОЛЬШИМИ БУКВАМИ).

nbjcr o erkjifm hcmr-ekjjjqr. hl spjqrji nsjgh dh qnj ekjf n qjla.

Ответ: ВЧЕРА Я ЗАМЕТИЛ ОРЛА-ЗМЕЕЕДА. ОН СЪЕДАЕТ ВСЕГО ПО ДВЕ ЗМЕИ В ДЕНЬ.

Пояснение. Сообщения подобраны так, чтобы расшифровать их можно было последовательно, отталкиваясь от определённых слов, которые можно уверенно расшифровать по внешнему виду, и подставляя полученные буквы в другие слова (отсюда и несколько причудливые формулировки). В данном варианте это слово „ekjjjqr" („змееееда").

Дневник с секретом

Влюблённый студент Аристарх сделал запись в своём дневнике, используя простой подстановочный шифр (латинским буквам и цифрам взаимно однозначно соответствуют русские, буква «ё» не используется). К счастью, студент Аристарх скрупулёзно расставил пробелы и знаки препинания, не заменяя их. Расшифруйте эту запись (ответ записывается БОЛЬШИМИ БУКВАМИ).

pqp bj fhj jj hj lcogae? njke ihq ndjm hq dnjaj fgljj g olgbj!

Ответ: КАК ЖЕ МНЕ ЕЕ НЕ ЛЮБИТЬ? ВЕДЬ ОНА ВСЕХ НА СВЕТЕ МИЛЕЕ И БЛИЖЕ!

Пояснение. Сообщения подобраны так, чтобы расшифровать их можно было последовательно, отталкиваясь от определённых слов, которые можно уверенно расшифровать по внешнему виду, и подставляя полученные буквы в другие слова (отсюда и несколько причудливые формулировки). В данном варианте это слово „jj“ („её“ без буквы „ё“, то есть, строго говоря, „ее“).

Задачи по математике

Правильные помеченные тетраэдры

Рассмотрим все попарно различные (т.е. их невозможно наложить с совпадением чисел) расстановки 4 разных чисел из 1, 2, 3, 4, 5 в вершинах правильных тетраэдров с ребром единичной длины. В каждом тетраэдре числа, стоящие на концах каждого ребра, перемножили, и все произведения сложили (во всех таких тетраэдрах вместе). Найти полученное число.

Ответ: 510.

Решение. Пусть концам какого-то ребра тетраэдра приписаны числа a и b. Тогда существует $C_3^2 \cdot 2! = 6$ способов пометить две другие вершины (поскольку мы выбираем нужные два числа из трех оставшихся и расставляем их при этом двумя разными способами). Поэтому каждое произведение ab встречается в искомой сумме ровно 6 раз. Значит, искомая сумма 6 раз больше, чем сумма всех попарных произведений

$$(1+2+3+4)\cdot 5 + (1+2+3)\cdot 4 + (1+2)\cdot 3 + 1\cdot 2 = 50+24+9+2 = 85$$

и равна $85 \cdot 6 = 510$.

Последовательные взвешивания

Какое минимальное число взвешиваний необходимо, чтобы отмерить 30 кг соли, имея двухчашечные весы с одной гирей 1 кг?

Ответ: 5.

Решение.

Взвесим 1 кг соли с помощью гири, затем взвесим 2 кг соли, положив на другую чашу весов гирю 1 кг и пакет соли в 1 кг, затем кладем гирю и всю отмеренную соль на одну чашу и взвешиваем 4 кг соли, аналогично взвешиваем 8 кг соли, и, наконец, 16 кг соли.

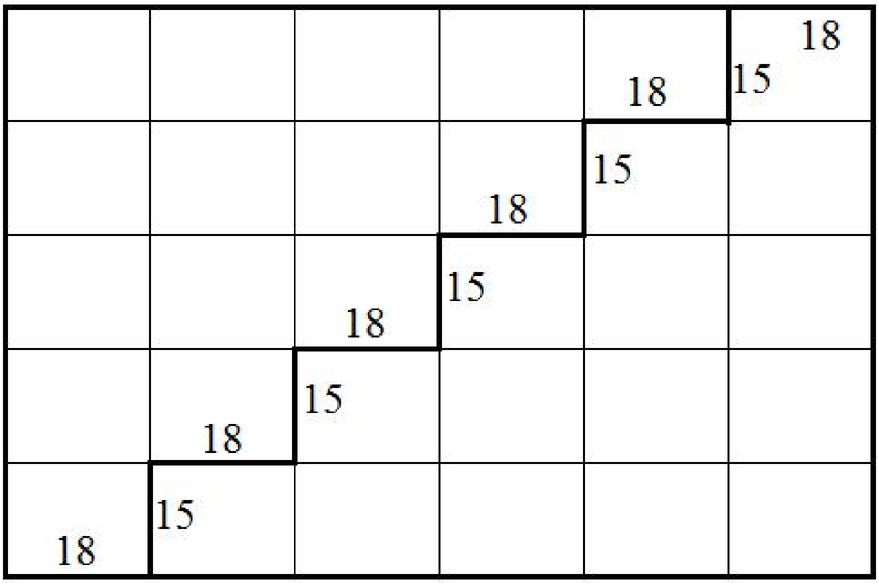
Искомые 30 кг соли набираем как $16 + 8 + 4 + 2$ кг.

Итак, за 5 взвешиваний 30 кг соли отмерить можно, а менее, чем за 5 взвешиваний, — очевидно, нельзя (легко видеть, что за n взвешиваний невозможно отмерить более, чем $2^n - 1$ кг соли).

Разрезания

На какое наименьшее число частей можно разрезать прямоугольник 108×75, чтобы из них можно было собрать квадрат 90×90?

Ответ: 2.



Решение. Ясно, что частей не меньше двух. Искомое разрезание прямоугольника на две части см. на рисунке.

Парламент

Лжецы всегда врут, НеЛжецы всегда говорят правду. В парламенте 100 депутатов. Первый сказал: „Среди нас по крайней мере один лжец“, второй: „Среди нас по крайней мере два лжеца“, и т.д., сотый сказал: „Среди нас по крайней мере сто лжецов“.

Сколько лжецов среди депутатов?

Ответ: 50.

Решение. Очевидно, если $1 \leqslant i < j \leqslant 100$ и i-й депутат солгал, то j-й депутат тоже солгал. Значит, найдется такое $0 \leqslant k \leqslant 100$, что первые k депутатов сказали правду, а остальные (последние) $(100 - k)$ депутатов солгали. Значит, верно, что среди 100 депутатов по крайней мере k лжецов и неверно, что среди них по крайней мере $(k+1)$ лжецов. Значит, лжецов ровно k, причем это число равно $(100-k)$. Отсюда $k=50$.

Сколько?

Среди чисел 1, 2, …, 1000 найти количество чисел, которые делятся на 6 или не делятся на 15.

Ответ: 967.

Решение. Легко видеть, что для любых натуральных чисел n и k среди чисел 1, 2, …, n есть ровно $[n/k]$ чисел, которые делятся на k.

Искомое количество получается, если из всех 1000 чисел вычеркнуть те, которые делятся на 15, но не делятся на 6. Осталось заметить, что, поскольку НОК(6, 15) $= 30$, среди $[1000/15] = 66$ чисел, которые делятся на 15, каждое второе делится на 6.

В итоге, ровно $1000 - 66/2 = 967$ чисел удовлетворяет условию задачи.

Две хорды

Две хорды AB и CD окружности пересекаются под углом 45°. Известно, что $AC = \sqrt{10}$, $BD = \sqrt{20}$. Найти сумму квадратов всех возможных радиусов такой окружности.

Ответ: 30.

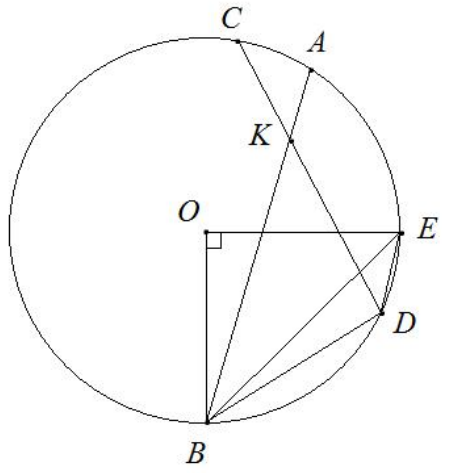


Рис. 1

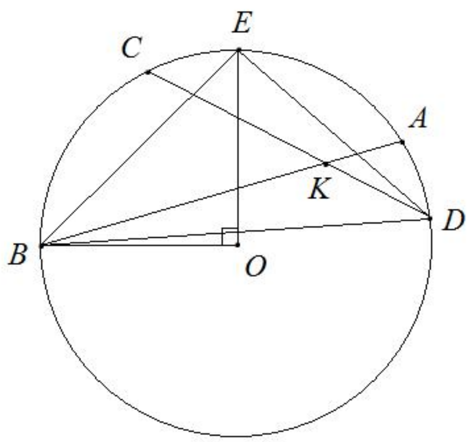


Рис. 2

Решение. Возможны 2 случая (см. рис. 1 и рис. 2). Пусть $AB \cap CD = \{K\}$.

Случай 1: $\angle AKC = 45^\circ$. Отложим от точки D дугу DE, равную дуге AC. Тогда $\breve{BD} + \breve{DE} = \breve{BD} + \breve{AC} = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. Отсюда угловая величина дуги BE, не содержащей точку D, равна $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ и $\angle BDE = \frac{1}{2}\breve{BE} = 135^\circ$. Выразим BE^2 по теореме Пифагора и по теореме косинусов: $2R^2 = BE^2 = 10 + 20 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos 135^\circ$, откуда $R^2 = 25$, $R = 5$.

Случай 2: $\angle AKC = 135°$. Отложим от точки D дугу DE, равную дуге AC. Тогда $\breve{BD} + \breve{DE} = \breve{BD} + \breve{AC} = 2 \cdot 135° = 270°$. Отсюда угловая величина дуги BE, не содержащей точку D, равна $360° - 270° = 90°$ и $\angle BDE = \frac{1}{2}\breve{BE} = 45°$. Выразим BE^2 по теореме Пифагора и по теореме косинусов: $2R^2 = BE^2 = 10 + 20 - 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos 45°$, откуда $R^2 = 5$, $R = \sqrt{5}$.

Итак, сумма квадратов всех возможных радиусов окружности равна $25 + 5 = 30$.

Уравнение в целых числах

Сколько различных пар целых чисел (x, y) удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}?$$

Ответ: 53.

Решение. Перенесем все в левую часть и приведем все дроби к общему знаменателю. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2015(x+y) & = & xy \\ xy & \neq & 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что уравнение системы приводится к виду

$$(x-2015)(y-2015) = 2015^2,$$

где $2015^2 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2$ есть разложение числа 2015^2 на простые множители.

Поскольку в разложении любого натурального делителя числа 2015^2 на простые множители числа 5, 13 и 31 могут встречаться в степенях 0, 1 или 2, число 2015^2 имеет ровно $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ *натуральных* делителей, а значит, *целых* делителей будет в два раза больше.

Таким образом, имеем ровно 54 возможных целых значений для выражения $(x - 2015)$, причем в каждом случае $(y - 2015)$ ищется однозначно как $\frac{2015^2}{x-2015}$.

Значит, уравнение системы имеет ровно 54 решения, из которых только одно решение (а именно, решение $(0, 0)$) не удовлетворяет неравенству системы.

Уравнение в целых числах

Сколько различных пар целых чисел (x, y) удовлетворяют уравнению

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}?$$

Ответ: 107.

Решение. Перенесем все в левую часть и приведем все дроби к общему знаменателю. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2015(x+2y) &= xy \\ xy &\neq 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что уравнение системы приводится к виду

$$(x - 2\cdot 2015)(y - 2015) = 2\cdot 2015^2,$$

где $2\cdot 2015^2 = 2\cdot 5^2\cdot 13^2\cdot 31^2$ есть разложение числа $2\cdot 2015^2$ на простые множители.

Поскольку в разложении любого натурального делителя числа $2\cdot 2015^2$ на простые множители числа 5, 13 и 31 могут встречаться в степенях 0, 1 или 2, а число 2 — в степенях 0 или 1, число $2\cdot 2015^2$ имеет ровно $2\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 54$ *натуральных* делителей, а значит, *целых* делителей будет в два раза больше.

Таким образом, имеем 108 возможных целых значений для выражения $(x - 2\cdot 2015)$, причем в каждом случае $(y - 2015)$ ищется однозначно как $\frac{2\cdot 2015^2}{x - 2\cdot 2015}$.

Значит, уравнение системы имеет ровно 108 решений, из которых только одно решение (а именно, решение $(0,0)$) не удовлетворяет неравенству системы.

Уравнение в целых числах

Сколько различных пар целых чисел (x, y) удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2015}?$$

Ответ: 107.

Решение. Перенесем все в левую часть и приведем все дроби к общему знаменателю. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2015(3x+y) &= xy \\ xy &\neq 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что уравнение системы приводится к виду

$$(x - 2015)(y - 3\cdot 2015) = 3\cdot 2015^2,$$

где $3\cdot 2015^2 = 3\cdot 5^2\cdot 13^2\cdot 31^2$ есть разложение числа $3\cdot 2015^2$ на простые множители.

Поскольку в разложении любого натурального делителя числа $3\cdot 2015^2$ на простые множители числа 5, 13 и 31 могут встречаться в степенях 0, 1 или

2, а число 3 — в степенях 0 или 1, число $3 \cdot 2015^2$ имеет ровно $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ *натуральных* делителей, а значит, *целых* делителей будет в два раза больше.

Таким образом, имеем 108 возможных целых значений для выражения $(x - 2015)$, причем в каждом случае $(y - 3 \cdot 2015)$ ищется однозначно как $\frac{3\cdot 2015^2}{x-2015}$.

Значит, уравнение системы имеет ровно 108 решений, из которых только одно решение (а именно, решение $(0, 0)$) не удовлетворяет неравенству системы.

Уравнение в целых числах

Сколько различных пар целых чисел (x, y) удовлетворяют уравнению

$$\frac{5}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}?$$

Ответ: 71.

Решение. Перенесем все в левую часть и приведем все дроби к общему знаменателю. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2015(x + 5y) & = & xy \\ xy & \neq & 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что уравнение системы приводится к виду

$$(x - 5 \cdot 2015)(y - 2015) = 5 \cdot 2015^2,$$

где $5 \cdot 2015^2 = 5^3 \cdot 13^2 \cdot 31^2$ есть разложение числа $5 \cdot 2015^2$ на простые множители.

Поскольку в разложении любого натурального делителя числа $5 \cdot 2015^2$ на простые множители числа 13 и 31 могут встречаться в степенях 0, 1 или 2, а число 5 — в степенях 0, 1, 2 или 3, число $5 \cdot 2015^2$ имеет ровно $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ *натуральных* делителей, а значит, *целых* делителей будет в два раза больше.

Таким образом, имеем 72 возможных значений для выражения $(x - 5\cdot 2015)$, причем в каждом случае $(y - 2015)$ ищется однозначно как $\frac{5\cdot 2015^2}{x-5\cdot 2015}$.

Значит, уравнение системы имеет ровно 72 решения, из которых только одно решение (а именно, решение $(0, 0)$) не удовлетворяет неравенству системы.

Система с параметром

Найти сумму квадратов всех таких значений параметра a, при каждом из которых имеет решение система уравнений:

$$\begin{cases} x - y + \frac{1}{4x} - \frac{1}{4y} = \frac{5}{4} \cdot (|y| - |a|), \\ y + a + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4a} = \frac{5}{4} \cdot (|x| + |a|), \\ a + \frac{1}{4a} = \frac{5}{4} \cdot |x|. \end{cases}$$

Ответ: 1.

Решение. Ясно, что x, y, a отличны от нуля. Если вместо первого уравнения системы записать результат вычитания третьего уравнения из суммы первого и второго уравнений, а вместо второго — разность второго и третьего уравнений системы, то после домножения всех уравнений на 4 система приведется к виду:

$$\begin{cases} 4x + \frac{1}{x} = 5|y|, \\ 4y + \frac{1}{y} = 5|a|, \\ 4a + \frac{1}{a} = 5|x|. \end{cases}$$

Введем функцию $f(t) = 4t + \frac{1}{t}$. Тогда система перепишется в виде

$$\begin{cases} f(x) = 5|y|, \\ f(y) = 5|a|, \\ f(a) = 5|x|. \end{cases}$$

Заметим, что если $t > 0$, то $f(t) = 2 \cdot \left(2t + \frac{1}{2t}\right) \geq 4$, причем равенство достигается лишь при $t = 0,5$, а если $t < 0$, то $f(t) = 2 \cdot \left(2t + \frac{1}{2t}\right) \leq -4$. Поэтому из положительности значений функции f в точках x, y, a, в которых уравнения системы превращаются в верные равенства, следует, что числа x, y, a положительны, так что модули раскрываются положительным образом и система преобразуется к виду

$$\begin{cases} f(x) = 5y, \\ f(y) = 5a, \\ f(a) = 5x. \end{cases}$$

Так как при положительном значении t значение функции $f(t)$ не меньше 4, то каждое из указанных чисел x, y, a не меньше $0,8$. Но при $t \geq 0,8$ функция $f(t)$ строго возрастает. Действительно, пусть $t_1 > t_2 \geq 0,8$. Тогда

$$f(t_1) - f(t_2) = \left(4t_1 + \frac{1}{4t_1}\right) - \left(4t_2 + \frac{1}{4t_2}\right) = (t_1 - t_2) \cdot \left(4 - \frac{1}{t_1 t_2}\right) > 0,$$

что и доказывает строгое возрастание $f(t)$ при $t \geq 0,8$.

Предположим теперь, что для указанных чисел x, y выполнено неравенство $x \geq y$. Тогда в силу возрастания $f(t)$ имеем: $f(x) \geq f(y)$, откуда в силу первого и второго уравнений последней системы получаем: $y \geq a$. Далее снова в силу возрастания функции $f(t)$ получаем: $f(y) \geq f(a)$, откуда в силу второго и третьего уравнений последней системы получаем: $a \geq x$. Подытожим: $x \geq y \geq a \geq x$, то есть $x = y = a$. Подставляя эти равенства в последнюю систему, с учетом положительности a получаем $a = 1$. Предположение $x \leq y$ аналогичным образом приводит к тому же результату.