Олимпиада школьников
по прикладной математике и информатике
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета
имени М. В. Ломоносова

Заочный тур.

19 марта 2016 года

8-10 классы

Ответы и решения

Правильные ответы помечены «$\triangleright$».

Задачи по информатике

Переполнение

Укажите, чему будет равно десятичное значение 2-байтовой ячейки, содержащей целое число со знаком (отрицательное число при этом представляется в дополнительном коде), если изначально в ней лежало десятичное число 18477, а затем его умножили на 494. Переполнение ячейки не вызывает ошибки, но все лишние слева разряды пропадают.

- $\triangleright$ 18134
- 0
- 9127638
- -18135
- -4573058
- -18134
- 18135
- -9146115
- -9127638
- 9146115
- 4563819

Переполнение

Укажите, чему будет равно десятичное значение 1-байтовой ячейки, содержащей целое число со знаком (отрицательное число при этом представляется в дополнительном коде), если изначально в ней лежало десятичное число 110, а затем его умножили на 110. Переполнение ячейки не вызывает ошибки, но все лишние слева разряды пропадают.

- $\triangleright$ 68
- 0
- 12100
- -69
- -6105
- -68
- 69
- -12210
- -12100
- 12210
- 6050

Переполнение

Укажите, чему будет равно десятичное значение 1-байтовой ячейки, содержащей целое число со знаком (отрицательное число при этом представляется в дополнительном коде), если изначально в ней лежало десятичное число 41, а затем его умножили на 107. Переполнение ячейки не вызывает ошибки, но все лишние слева разряды пропадают.

- $\triangleright$ 35
- 0
- 4387
- -36
- -2214
- -35
- 36
- -4428
- -4387
- 4428
- 2193

Переполнение

Укажите, чему будет равно десятичное значение 1-байтовой ячейки, содержащей целое число со знаком (отрицательное число при этом представляется в дополнительном коде), если изначально в ней лежало десятичное число 119, а затем его умножили на 125. Переполнение ячейки не вызывает ошибки, но все лишние слева разряды пропадают.

- $\triangleright$ 27
- 0
- 14875
- -28
- -7497
- -27
- 28
- -14994
- -14875
- 14994
- 7437

Переполнение

Укажите, чему будет равно десятичное значение 4-байтовой ячейки, содержащей целое число со знаком (отрицательное число при этом представляется в дополнительном коде), если изначально в ней лежало десятичное число 2089320491, а затем его умножили на 314. Переполнение ячейки не вызывает ошибки, но все лишние слева разряды пропадают.

- $\triangleright$ -1083362114
- 0
- 656046634174
- 1083362113
- -329067977333
- 1083362114
- -1083362113
- -658135954665
- -656046634174
- 658135954665
- 328023317087

Переполнение

Укажите, чему будет равно десятичное значение 1-байтовой ячейки, содержащей целое число со знаком (отрицательное число при этом представляется в дополнительном коде), если изначально в ней лежало десятичное число 75, а затем его умножили на 119. Переполнение ячейки не вызывает ошибки, но все лишние слева разряды пропадают.

- ▷ −35
- 0
- 8925
- 34
- −4500
- 35
- −34
- −9000
- −8925
- 9000
- 4462

Переполнение

Укажите, чему будет равно десятичное значение 2-байтовой ячейки, содержащей целое число со знаком (отрицательное число при этом представляется в дополнительном коде), если изначально в ней лежало десятичное число 27979, а затем его умножили на 142. Переполнение ячейки не вызывает ошибки, но все лишние слева разряды пропадают.

- ▷ −24678
- 0
- 3973018
- 24677
- −2000499
- 24678
- −24677
- −4000997
- −3973018
- 4000997
- 1986509

Циклы

Укажите, чему будет равно значение переменной H при выполнении следующего псевдокода:

```
Присвоить -15 в H
Присвоить 39 в I
Повторять, пока I не больше 167
    Присвоить -36 в K
    Повторять, пока K не больше 128
        Прибавить к H 3
        Прибавить к K 8
    Конец повтора для K
    Прибавить к H 5
    Прибавить к I 8
Конец повтора для I
```

- ▷ 1141
- 1056
- 1209
- 1073
- 1192
- 1090
- 1263
- 1025

Циклы

Укажите, чему будет равно значение переменной A при выполнении следующего псевдокода:

```
Присвоить -36 в A
Присвоить 83 в I
Повторять, пока I не больше 227
    Присвоить -99 в K
    Повторять, пока K не больше 33
        Прибавить к A 2
        Прибавить к K 9
    Конец повтора для K
    Прибавить к A 5
    Прибавить к I 6
Конец повтора для I
```

- ▷ 839
- 714
- 874

- 804
- 889
- 789
- 926
- 756

Циклы

Укажите, чему будет равно значение переменной G при выполнении следующего псевдокода:

```
Присвоить 56 в G
Присвоить -89 в I
Повторять, пока I не больше 64
    Присвоить 60 в K
    Повторять, пока K не больше 210
        Прибавить к G 6
        Прибавить к K 9
    Конец повтора для K
    Прибавить к G 9
    Прибавить к I 7
Конец повтора для I
```

- ▷ 2498
- 2300
- 2609
- 2387
- 2630
- 2366
- 2747
- 2261

Циклы

Укажите, чему будет равно значение переменной B при выполнении следующего псевдокода:

```
Присвоить -66 в B
Присвоить 82 в I
Повторять, пока I не больше 273
    Присвоить 58 в K
    Повторять, пока K не больше 168
        Прибавить к B 5
        Прибавить к K 7
```

```
    Конец повтора для K
    Прибавить к B 2
    Прибавить к I 9
Конец повтора для I
```

- ▷ 1738
- 1694
- 1820
- 1656
- 1848
- 1628
- 1935
- 1551

Циклы

Укажите, чему будет равно значение переменной E при выполнении следующего псевдокода:

```
Присвоить -44 в E
Присвоить -24 в I
Повторять, пока I не больше 131
    Присвоить -40 в K
    Повторять, пока K не больше 92
        Прибавить к E 6
        Прибавить к K 6
    Конец повтора для K
    Прибавить к E 2
    Прибавить к I 4
Конец повтора для I
```

- ▷ 5416
- 5338
- 5556
- 5276
- 5650
- 5182
- 5796
- 5048

Циклы

Укажите, чему будет равно значение переменной A при выполнении следующего псевдокода:

```
Присвоить 83 в A
Присвоить -67 в I
Повторять, пока I не больше 116
    Присвоить -87 в K
    Повторять, пока K не больше 46
        Прибавить к A 4
        Прибавить к K 8
    Конец повтора для K
    Прибавить к A 6
    Прибавить к I 5
Конец повтора для I
```

- ▷ 2821
- 2599
- 2895
- 2747
- 2969
- 2673
- 3047
- 2603

Шифр

Известно, что сообщение «embalmed systemic» в зашифрованном виде выглядит как «hvpdesdrocpdhvgu vjbpvjwkhvpdlzft». Как, скорее всего, выглядит зашифрованное сообщение «backstep bottlery»?

- ▷ «esdrftnbvjwkhvsg esrfwkwkochvuibp»
- «hvpdesdrocpdhvgu vjbpvjwkhvpdlzft»
- «esdrftnbvjwkhvbp esrfwkwkochvuisg»
- «bpmaxlnbaosgcqjx bpqesgsgrfcqesth»
- «aolzcqymdrvjhvrf aoxlvjvjwkhvftsg»
- «aoznbpwkuivjcqsg aoymvjvjxlcqthrf»
- «drcqesmauivjgurf drqevjvjnbguthao»

Шифр

Известно, что сообщение «suburban strongly» в зашифрованном виде выглядит как «xlznguznwkguftsg xlymwkthsglzqedr». Как, скорее всего, выглядит зашифрованное сообщение «clobbers sinology»?

- ▷ «hvqethgugujxwkxl xlnbsgthqethlzdr»
- «xlznguznwkguftsg xlymwkthsglzqedr»
- «hvqethgugujxdrxl xlnbsgthqethlzwk»
- «jxbpocxlxlaokyzn znymesocbpocthqe»
- «nbxlhvlzlzesqeui uirfjxhvxlhviwzn»
- «cqymaobpbpdrvjwk wkxlznaoymaoesui»
- «hvpdsggugujxvjwk wkmarfsgpdsgescq»

Шифр

Известно, что сообщение «bulesis cryopump» в зашифрованном виде выглядит как «nzgsxjqcequgeq oadpkwambngsykbn». Как, скорее всего, выглядит зашифрованное сообщение «perturb assembly»?

- ▷ «bnqcdpfrgsdpnz myeqeqqcyknzxjkw»
- «nzgsxjqcequgeq oadpkwambngsykbn»
- «bnqcdpfrgsdpnz myeqeqqcxjnzykkw»
- «jvykgscokwgsmy eqtftfykdpmyseoa»
- «qcsemyhtrdmypb vhdpdpsetfpboajv»
- «htfrjvlxkwjveq dpiuiufrbneqcogs»
- «lxqccoeqfrconz mydpdpqcyknzxjjv»

Шифр

Известно, что сообщение «bistro dipropyl» в зашифрованном виде выглядит как «huobylzmxkuh jwobvixkuhvierre». Как, скорее всего, выглядит зашифрованное сообщение «carbon ethology»?

- ▷ «ivgtxkhuuhtg kxzmnauhreuhmzer»
- «huobylzmxkuh jwobvixkuhvierre»
- «ivgtxkhuuhre kxzmnauhtguhmzer»
- «xknafsbosfre viivgtsfcpsfqdhu»
- «gthuxknaboyl sfuhwjborebokxzm»
- «cpanfsbowjvi ylerxkwjuhwjzmdq»
- «hugtwjfstgsf jwylmztgqdtglydq»

Шифр

Известно, что сообщение «bonders homey» в зашифрованном виде выглядит как «dxqkpjfzgatnuo jdqkoigaau». Как, скорее всего, выглядит зашифрованное сообщение «hobbles mammy»?

- ▷ «jdqkdxdxnhgauo oicwoioiau»
- «dxqkpjfzgatnuo jdqkoigaau»
- «jdqkdxdxnhcwuo oigaoioiau»
- «cwztmgmgjdvpfz xroixrxrbv»
- «keuonhnhhboiwq jdsmjdjdqk»
- «ztysvpvpwqtnau xruoxrxrbv»
- «bvpjdxdxmggatn nhcwnhnhzt»

Шифр

Известно, что сообщение «plumbing empty» в зашифрованном виде выглядит как «yhuddmvektrawfpy nwveyhclhq». Как, скорее всего, выглядит зашифрованное сообщение «backsill sixty»?

- ▷ «ktjslutcbkraudud bkragpclhq»
- «yhuddmvektrawfpy nwveyhclhq»
- «ktjslutcclraudud clragpbkhq»
- «ktmvbknwyhclrara yhcljsirdm»
- «foennwhqbkpyclcl bkpyvejsmv»
- «dmfoengpzihqirir zihqbkajcl»
- «ktjslusbajirtctc ajirfobkgp»

Задачи по математике

Циркулина

Неподалеку от Солнечного города универсальный круговой самоходный посадочный комбайн «Циркулина» без помощи комбайнера распахивает ровное практически круглое поле следующим образом. Комбайн привязан натянутой цепью к вертикальной цилиндрической опоре, имеющей 2 метра в обхвате. Длина цепи 600 метров, цепь располагается горизонтально. Точка крепления цепи к опоре находится к северу от центра нижнего основания опоры. В начальный момент комбайн находится к северо-западу от центра основания опоры и начинает движение в направлении на северо-восток. Во время движения комбайна цепь находится в натянутом состоянии, комбайн движется по часовой стрелке вокруг опоры (на виде сверху). Укажите суммарную (за все время движения комбайна) величину поворота (в градусах) комбайна вокруг центра основания опоры. Пояснение: требуемая величина больше 360 градусов.

Ответ: 108045.

Решение. Ясно, что цепь совершит вокруг опоры $600 : 2 = 300$ полных оборотов, при этом в конце пути комбайн остановится у точки крепления цепи к опоре. Комбайн же совершит 45° и еще 300 полных оборотов, так как следует учесть, что до момента, когда точка крепления цепи к опоре впервые окажется между центром опоры и комбайном, — первые 45° — комбайн проедет, не начав наматывать цепь на опору. Поэтому величина полного поворота комбайна вокруг центра опоры будет равна $300 \cdot 360^\circ + 45^\circ = 108045^\circ$.

Неоднозначное декодирование

Какова минимальная длина слова из нулей и единиц, неединственным образом разрезаемого на слова, равные словам 010101, 1010, 010?

Ответ: 15.

Решение. Пусть $C = \{010101, 1010, 010\}$. Поскольку искомая длина слова l должна быть минимальной, легко заметить, что само слово w минимальной длины l, допускающее два различных разрезания на указанные слова, обязано:

а) начинаться с нуля (иначе первое слово во всех разрезаниях определяется одинаково, так что w окажется не самым коротким),

б) оканчиваться нулем (иначе последнее слово во всех разрезаниях определяется одинаково, так что w окажется не самым коротким),

в) не содержать подряд идущих одинаковых символов (так как одинаковых подряд идущих символов нет ни в одном из слов, на которые разрезается w; если предположить, что в w есть два одинаковых подряд идущих символа, то в любом разрезании в точке a между этими символами стыкуются разрезаемые слова, и либо справа, либо слева от точки a будет располагаться более короткое, чем w, слово, допускающее два различных разрезания).

Поэтому $w = 01010101\ldots010$, при этом в одном разрезании (назовем это разрезание первым) первое слово есть 010101, а в другом (назовем это разрезание вторым) — 010. Заметим, что после первого слова во втором разрезании может следовать лишь последовательность слов вида 1010 (так как 1010 — единственное слово из C, начинающееся с единицы). Далее, последнее слово в первом разрезании — только 010, а перед ним может находиться только последовательность из слов 010101 (так как 010101 — единственное слово из C, оканчивающееся единицей). Считая, что в первом разрезании ровно i слов 010101, а во втором разрезании ровно j слов 1010, получим равенства: $l = 6i + 3 = 3 + 4j$, откуда с учетом минимальности l получим: $l = 15$, $w = 010101\,010101\,010 = 010\,1010\,1010\,1010$.

Неоднозначное декодирование

Какова минимальная длина слова из нулей и единиц, неединственным образом разрезаемого на слова, равные словам 0101, 101010, 010?

Ответ: 15.

Решение. Пусть $C = \{0101, 101010, 010\}$. Поскольку искомая длина слова l должна быть минимальной, легко заметить, что само слово w минимальной длины l, допускающее два различных разрезания на указанные слова, обязано:

а) начинаться с нуля (иначе первое слово во всех разрезаниях определяется одинаково, так что w окажется не самым коротким),

б) оканчиваться нулем (иначе последнее слово во всех разрезаниях определяется одинаково, так что w окажется не самым коротким),

в) не содержать подряд идущих одинаковых символов (так как одинаковых подряд идущих символов нет ни в одном из слов, на которые разрезается w; если предположить, что в w есть два одинаковых подряд идущих символа, то в любом разрезании в точке a между этими символами стыкуются разрезаемые слова, и либо справа, либо слева от точки a будет располагаться более короткое, чем w, слово, допускающее два различных разрезания).

Поэтому $w = 01010101\ldots010$, при этом в одном разрезании (назовем это разрезание первым) первое слово есть 0101, а в другом (назовем это разрезание вторым) — 010. Заметим, что после первого слова во втором разрезании может следовать лишь последовательность слов вида 101010 (так как 101010 — единственное слово из C, начинающееся с единицы). Далее, последнее слово в первом разрезании — только 010, а перед ним может находиться только последовательность из слов 0101 (так как 0101 — единственное слово из C, оканчивающееся единицей). Считая, что в первом разрезании ровно i слов 0101, а во втором разрезании ровно j слов 101010, получим равенства: $l = 4i + 3 = 3 + 6j$, откуда с учетом минимальности l получим: $l = 15$, $w = 0101\,0101\,0101\,010 = 010\,101010\,101010$.

Неоднозначное декодирование

Какова минимальная длина слова из нулей и единиц, неединственным образом разрезаемого на слова, равные словам 01010101, 101010, 010?

Ответ: 27.

Решение. Пусть $C = \{01010101, 101010, 010\}$. Поскольку искомая длина слова l должна быть минимальной, легко заметить, что само слово w минимальной длины l, допускающее два различных разрезания на указанные слова, обязано:

а) начинаться с нуля (иначе первое слово во всех разрезаниях определяется одинаково, так что w окажется не самым коротким),

б) оканчиваться нулем (иначе последнее слово во всех разрезаниях определяется одинаково, так что w окажется не самым коротким),

в) не содержать подряд идущих одинаковых символов (так как одинаковых подряд идущих символов нет ни в одном из слов, на которые разрезается w; если предположить, что в w есть два одинаковых подряд идущих символа, то в любом разрезании в точке a между этими символами стыкуются разрезаемые слова, и либо справа, либо слева от точки a будет располагаться более короткое, чем w, слово, допускающее два различных разрезания).

Поэтому $w = 01010101\ldots010$, при этом в одном разрезании (назовем это разрезание первым) первое слово есть 01010101, а в другом (назовем это разрезание вторым) — 010. Заметим, что после первого слова во втором разрезании может следовать лишь последовательность слов вида 101010 (так как 101010 — единственное слово из C, начинающееся с единицы). Далее, последнее слово в первом разрезании — только 010, а перед ним может находиться только последовательность из слов 01010101 (так как 01010101 — единственное слово из C, оканчивающееся единицей). Считая, что в первом разрезании ровно i слов 01010101, а во втором разрезании ровно j слов 101010, получим равенства: $l = 8i + 3 = 3 + 6j$, откуда с учетом минимальности l получим: $l = 27$, $w = 01010101\,01010101\,01010101\,010 = 010\,101010\,101010\,101010\,101010$.

Неоднозначное декодирование

Какова минимальная длина слова из нулей и единиц, неединственным образом разрезаемого на слова, равные словам 010101, 10101010, 010?

Ответ: 27.

Решение. Пусть $C = \{010101, 10101010, 010\}$. Поскольку искомая длина слова l должна быть минимальной, легко заметить, что само слово w минимальной длины l, допускающее два различных разрезания на указанные слова, обязано:

а) начинаться с нуля (иначе первое слово во всех разрезаниях определяется одинаково, так что w окажется не самым коротким), б) оканчиваться нулем (иначе последнее слово во всех разрезаниях определяется одинаково, так что w окажется не самым коротким),

в) не содержать подряд идущих одинаковых символов (так как одинаковых подряд идущих символов нет ни в одном из слов, на которые разрезается w; если предположить, что в w есть два одинаковых подряд идущих символа, то в любом разрезании в точке a между этими символами стыкуются разрезаемые слова, и либо справа, либо слева от точки a будет располагаться более короткое, чем w, слово, допускающее два различных разрезания).

Поэтому $w = 01010101\ldots010$, при этом в одном разрезании (назовем это разрезание первым) первое слово есть 010101, а в другом (назовем это разрезание вторым) — 010. Заметим, что после первого слова во втором разрезании может следовать лишь последовательность слов вида 10101010 (так как 10101010 — единственное слово из C, начинающееся с единицы). Далее, последнее слово в первом разрезании — только 010, а перед ним может находиться только последовательность из слов 010101 (так как 010101 — единственное слово из C, оканчивающееся единицей). Считая, что в первом разрезании ровно i слов 010101, а во втором разрезании ровно j слов 10101010, получим равенства: $l = 6i + 3 = 3 + 8j$, откуда с учетом минимальности l получим: $l = 27$, $w = 010101\,010101\,010101\,010101\,010 = 010\,10101010\,10101010\,10101010$.

Параметр

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{6x + 5x^2 - x^3}{x+1} = a$$

имеет единственное решение? В ответе указать значение a или сумму всех значений a, если их более одного.

Ответ: 2.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 9 - a, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы при $a = 9$ имеет единственное решение $x = 3$, при $a < 9$ имеет два решения, а при $a > 9$ не имеет решений. Заметим: из первого уравнения системы $x = -1$ только при $a = -7$. Поэтому система будет иметь единственное решение только в двух случаях:

а) при $a = -7$: $x = 7$,

б) при $a = 9$: $x = 3$.

Параметр

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{x-1} = a$$

имеет единственное решение? В ответе указать значение a или сумму всех значений a, если их более одного.

Ответ: -14.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 9 + a, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы при $a = -9$ имеет единственное решение $x = 3$, при $a > -9$ имеет два решения, а при $a < -9$ не имеет решений. Заметим: из первого уравнения системы $x = 1$ только при $a = -5$. Поэтому система будет иметь единственное решение только в двух случаях:

а) при $a = -5$: $x = 5$,

б) при $a = -9$: $x = 3$.

Параметр

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{6x + 5x^2 - x^3}{x + 1} = -a$$

имеет единственное решение? В ответе указать значение a или сумму всех значений a, если их более одного.

Ответ: -2.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 9 + a, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы при $a = -9$ имеет единственное решение $x = 3$, при $a > -9$ имеет два решения, а при $a < -9$ не имеет решений. Заметим: из первого уравнения системы $x = -1$ только при $a = 7$. Поэтому система будет иметь единственное решение только в двух случаях:

а) при $a = 7$: $x = 7$,

б) при $a = -9$: $x = 3$.

Параметр

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{x - 1} = -a$$

имеет единственное решение? В ответе указать значение a или сумму всех значений a, если их более одного.

Ответ: 14.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 9 - a, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы при $a = 9$ имеет единственное решение $x = 3$, при $a < 9$ имеет два решения, а при $a > 9$ не имеет решений. Заметим: из первого уравнения системы $x = 1$ только при $a = 5$. Поэтому система будет иметь единственное решение только в двух случаях:

а) при $a = 5$: $x = 5$,

б) при $a = 9$: $x = 3$.

Число прямых

Равносторонний треугольник со стороной 8 был разлинован тремя множествами параллельных прямых (в каждом множестве содержится 7 прямых, параллельных «своей» стороне исходного треугольника) на равносторонние треугольники со стороной 1, после чего три «угловых» правильных треугольника со стороной 1 отре́зали. Укажите минимальное число прямых, непараллельных никакой стороне исходного треугольника, на которых лежат точки пересечения медиан каждого из оставшихся правильных треугольников со стороной 1.

Ответ: 13.

Решение. Расположим исходный треугольник ABC в координатной плоскости так, чтобы начало координат приходилось на середину основания AB, ось Ox содержала бы это основание (при этом $A = (-4;\, 0)$, $B = (4;\, 0)$), а ось Oy содержала бы высоту, проведенную к этому основанию (при этом $C = (0;\, 4\sqrt{3})$). Тогда тринадцати прямых вида $x = a$ $(a \in \{-3; -2,5; -2; -1,5; \ldots; 2; 2,5; 3\})$ достаточно для того, чтобы на них лежали точки пересечения медиан каждого из оставшихся правильных треугольников со стороной 1. Отметим, что эти прямые не параллельны никакой стороне исходного треугольника. Покажем, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. Рассмотрим множество M правильных треугольников со стороной 1, имеющих хотя бы по одной общей точке с внешней границей фигуры, полученной из исходного правильного треугольника со стороной 8 отрезанием угловых треугольничков. Множество M состоит ровно из 36 треугольников. Оказывается, всякая непараллельная сторонам треугольника прямая может проходить не более чем через три точки пересечения медиан треугольников из множества M. Действительно, пусть такая прямая l_1 проходит через две точки пересечения медиан треугольников из M, имеющих общие точки с основанием AB исходного треугольника. Тогда угол α_1 наименьшего поворота этой прямой по часовой стрелке до прямой, параллельной оси Ox, удовлетворяет, очевидно, условиям: $\alpha_1 \in (0;\, 30^\circ] \cup [150^\circ;\, 180^\circ)$. Аналогично, пусть прямая l_2 проходит через две точки пересечения медиан треугольников из M, имеющих общие точки с основанием AC исходного треугольника. Тогда угол α_2 наименьшего поворота этой прямой по часовой стрелке до прямой, параллельной оси Ox, удовлетворяет, очевидно, условиям: $\alpha_2 \in [30^\circ;\, 60^\circ) \cup (60^\circ;\, 90^\circ]$. Далее, пусть прямая l_3 проходит через две точки пересечения медиан треугольников из M, имеющих общие точки с основанием BC исходного треугольника. Тогда угол α_3 наименьшего поворота этой прямой по часовой стрелке до прямой, параллельной оси Ox, удовлетворяет, очевидно, условиям: $\alpha_3 \in [90^\circ;\, 120^\circ) \cup (120^\circ;\, 150^\circ]$. Отметим, что случаи таких углов, равных 30°, 90° и 150°, соответствуют перпендикулярам к сторонам исходного треугольника, каждый такой перпендикуляр проходит не более чем через три точки пересечения медиан треугольников из M. В остальных случаях углы α_1, α_2 и α_3 не могут совпадать, поэтому и соответствующая прямая не может проходить более чем через три точки пересечения медиан треугольников из M. Получается, что минимальное число непараллельных сторонам треугольника прямых, проходящих через точки пересечения медиан треугольников из M, не меньше $36 : 3 = 12$. Но каждая из прямых, проходящих через точку пересечения медиан того треугольника из M, который имеет общее основание с удаленным угловым треугольничком, может проходить не более чем через две точки пересечения медиан треугольников из M, так что двенадцати прямых недостаточно, а потому минимальное число нужных прямых не менее 13.

Число прямых

Равносторонний треугольник со стороной 10 был разлинован тремя множествами параллельных прямых (в каждом множестве содержится 9 прямых, параллельных «своей» стороне исходного треугольника) на равносторонние треугольники со стороной 1, после чего три «угловых» правильных треугольника со стороной 1 отрéзали. Укажите минимальное число прямых, непараллельных никакой стороне исходного треугольника, на которых лежат точки пересечения медиан каждого из оставшихся правильных треугольников со стороной 1.

Ответ: 17.

Решение. Расположим исходный треугольник ABC в координатной плоскости так, чтобы начало координат приходилось на середину основания AB, ось Ox содержала бы это основание (при этом $A = (-5;\,0)$, $B = (5;\,0)$), а ось Oy содержала бы высоту, проведенную к этому основанию (при этом $C = (0;\,5\sqrt{3})$). Тогда семнадцати прямых вида $x = a$ $(a \in \{-4; -3,5; -3; -2,5; \ldots; 3; 3,5; 4\})$ достаточно для того, чтобы на них лежали точки пересечения медиан каждого из оставшихся правильных треугольников со стороной 1. Отметим, что эти прямые не параллельны никакой стороне исходного треугольника. Покажем, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. Рассмотрим множество M правильных треугольников со стороной 1, имеющих хотя бы по одной общей точке с внешней границей фигуры, полученной из исходного правильного треугольника со стороной 10 отрезанием угловых треугольничков. Множество M состоит ровно из 48 треугольников. Оказывается, всякая непараллельная сторонам треугольника прямая может проходить не более чем через три точки пересечения медиан треугольников из множества M. Действительно, пусть такая прямая l_1 проходит через две точки пересечения медиан треугольников из M, имеющих общие точки с основанием AB исходного треугольника. Тогда угол α_1 наименьшего поворота этой прямой по часовой стрелке до прямой, параллельной оси Ox, удовлетворяет, очевидно, условиям: $\alpha_1 \in (0;\,30°] \cup [150°;\,180°)$. Аналогично, пусть прямая l_2 проходит через две точки пересечения медиан треугольников из M, имеющих общие точки с основанием AC исходного треугольника. Тогда угол α_2 наименьшего поворота этой прямой по часовой стрелке до прямой, параллельной оси Ox, удовлетворяет, очевидно, условиям: $\alpha_2 \in [30°;\,60°) \cup (60°;\,90°]$. Далее, пусть прямая l_3 проходит через две точки пересечения медиан треугольников из M, имеющих общие точки с основанием BC исходного треугольника. Тогда угол α_3 наименьшего поворота этой прямой по часовой стрелке до прямой, параллельной оси Ox, удовлетворяет, очевидно, условиям: $\alpha_3 \in [90°;\,120°) \cup (120°;\,150°]$. Отметим, что случаи таких углов, равных 30°, 90° и 150°, соответствуют перпендикулярам к сторонам исходного треугольника, каждый такой перпендикуляр проходит не более чем через три точки пересечения медиан треугольников из M. В остальных случаях углы α_1, α_2 и α_3 не могут совпадать, поэтому и соответствующая прямая не может проходить более чем через три точки пересечения медиан треугольников из M. Получается, что минимальное число непараллельных сторонам треугольника прямых, проходящих через точки пересечения медиан треугольников из M, не меньше $48 : 3 = 16$. Но каждая из прямых, проходящих через точку пересечения медиан того треугольника из M, который имеет общее основание с удаленным угловым треугольничком, может проходить не более чем через две точки пересечения медиан треугольников из M, так что шестнадцати прямых недостаточно, а потому минимальное число нужных прямых не менее 17.

Число прямых

Равносторонний треугольник со стороной 12 был разлинован тремя множествами параллельных прямых (в каждом множестве содержится 11 прямых, параллельных «своей» стороне исходного треугольника) на равносторонние треугольники со стороной 1, после чего три «угловых» правильных треугольника со стороной 1 отрéзали. Укажите минимальное число прямых, непараллельных никакой стороне исходного треугольника, на которых лежат точки пересечения медиан каждого из оставшихся правильных треугольников со стороной 1.

Ответ: 21.

Решение. Расположим исходный треугольник ABC в координатной плоскости так, чтобы начало координат приходилось на середину основания AB, ось Ox содержала бы это основание (при этом $A = (-6;\,0)$, $B = (6;\,0)$), а ось Oy содержала бы высоту, проведенную к этому основанию (при этом $C = (0;\,6\sqrt{3})$). Тогда двадцати одной прямой вида $x = a$ ($a \in \{-5; -4,5; -4; -3,5; \ldots; 4; 4,5; 5\}$) достаточно для того, чтобы на них лежали точки пересечения медиан каждого из оставшихся правильных треугольников со стороной 1. Отметим, что эти прямые не параллельны никакой стороне исходного треугольника. Покажем, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. Рассмотрим множество M правильных треугольников со стороной 1, имеющих хотя бы по одной общей точке с внешней границей фигуры, полученной из исходного правильного треугольника со стороной 12 отрезанием угловых треугольничков. Множество M состоит ровно из 60 треугольников. Оказывается, всякая непараллельная сторонам треугольника прямая может проходить не более чем через три точки пересечения медиан треугольников из множества M. Действительно, пусть такая прямая l_1 проходит через две точки пересечения медиан треугольников из M, имеющих общие точки с основанием AB исходного треугольника. Тогда угол α_1 наименьшего поворота этой прямой по часовой стрелке до прямой, параллельной оси Ox, удовлетворяет, очевидно, условиям: $\alpha_1 \in (0;\,30^\circ] \cup [150^\circ;\,180^\circ)$. Аналогично, пусть прямая l_2 проходит через две точки пересечения медиан треугольников из M, имеющих общие точки с основанием AC исходного треугольника. Тогда угол α_2 наименьшего поворота этой прямой по часовой стрелке до прямой, параллельной оси Ox, удовлетворяет, очевидно, условиям: $\alpha_2 \in [30^\circ;\,60^\circ) \cup (60^\circ;\,90^\circ]$. Далее, пусть прямая l_3 проходит через две точки пересечения медиан треугольников из M, имеющих общие точки с основанием BC исходного треугольника. Тогда угол α_3 наименьшего поворота этой прямой по часовой стрелке до прямой, параллельной оси Ox, удовлетворяет, очевидно, условиям: $\alpha_3 \in [90^\circ;\,120^\circ) \cup (120^\circ;\,150^\circ]$. Отметим, что случаи таких углов, равных 30°, 90° и 150°, соответствуют перпендикулярам к сторонам исходного треугольника, каждый такой перпендикуляр проходит не более чем через три точки пересечения медиан треугольников из M. В остальных случаях углы α_1, α_2 и α_3 не могут совпадать, поэтому и соответствующая прямая не может проходить более чем через три точки пересечения медиан треугольников из M. Получается, что минимальное число непараллельных сторонам треугольника прямых, проходящих через точки пересечения медиан треугольников из M, не меньше $60 : 3 = 20$. Но каждая из прямых, проходящих через точку пересечения медиан того треугольника из M, который имеет общее основание с удаленным угловым треугольничком, может проходить не более чем через две точки пересечения медиан треугольников из M, так что двадцати прямых недостаточно, а потому минимальное число нужных прямых не менее 21.

Неравенство

Решить неравенство

$$|x+1| + |x+2| + \ldots + |x+2016| \leqslant 1016066.$$

В ответе указать сумму длин интервалов решений.

Ответ: 3.

Решение. Очевидно, при любом раскрытии модулей левая часть неравенства представляет собой линейную функцию вида $f(x) = kx + b$. Ясно, что при $x < -1009$ будет выполнено $k < 0$, и поэтому $f(x)$ убывает на множестве $(-\infty; -1009]$, а при $x > -1008$

будет выполнено $k > 0$, и поэтому $f(x)$ возрастает на множестве $[-1008; +\infty)$. Кроме того, при $x \in [-1009; -1008]$ функция $f(x)$ равна константе.

Осталось заметить, что $f(-1010) = f(-1007) = 0 + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 1006) + 1007 + 1008 + 1009 = 1006 \cdot 1007 + 3 \cdot 1008 = 1016066$. Значит, решением неравенства будет интервал $[-1010; -1007]$ длины 3.

Уравнение в целых числах

Укажите, сколько различных пар $(x,\, y)$ целых чисел удовлетворяет уравнению

$$x^2 - 3y^2 = 2016.$$

Ответ: 0.

Решение. Так как $2016 \,\vdots\, 3$ и $3y^2 \,\vdots\, 3$, то и $x^2 \,\vdots\, 3$, откуда $x \,\vdots\, 3$, $x = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя это выражение в исходное уравнение, получим: $3k_2 - y^2 = 672$. Так как $672 \,\vdots\, 3$ и $3k^2 \,\vdots\, 3$, то и $y^2 \,\vdots\, 3$, откуда $y \,\vdots\, 3$, $y = 3l$, $l \in \mathbb{Z}$. Далее, $k^2 - 3l^2 = 224$, но при делении на 3 правая часть последнего уравнения может давать лишь остатки 0 и 1, тогда как правая часть дает остаток 2. Целочисленных решений у уравнения нет.

Неправильные сообщения

Шрек, как обычно, посылал на сотовый телефон Фионе состоящие из нулей и единиц сообщения длиной 54 символа, когда увидел, что Румпельштильцхен забрался на вышку сотовой связи и что-то там закоротил. Это неминуемо приведет к тому, что во всех последующих сообщениях Шрека для некоторого k ($2 \le k \le 54$) и для некоторых i_1, i_2, $\ldots$, i_k ($1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 54$) вместо каждой из цифр, исходно стоявших в позициях i_1, i_2, $\ldots$, i_k, будет передаваться минимум из этих цифр. Залезть на вышку Шрек не может, так как справедливо опасается, что вышка от этого упадет. За какое минимальное количество сообщений Шрек и Фиона, собравшись вместе, смогут гарантированнно определить k, а также i_1, i_2, $\ldots$, i_k?

Ответ: 6.

Решение. Пусть l есть минимальное число сообщений. Пусть M — таблица, полученная при выписывании всех посланных сообщений одно под другим, а M' — таблица, полученная при выписывании всех полученных сообщений одно под другим (в том же порядке, что и в M). Заметим: если в таблице M имеются равные столбцы с номерами j_1, j_2, $\ldots$, j_k, то заведомо не обнаружится неисправность, при которой для всех t от 1 до k имеет место равенство $i_t = j_t$, так как всякое отправленное сообщение будет равно полученному. А если все столбцы в M попарно различны, то всякая неисправность обнаружится, так как при неисправности появляются равные столбцы. Очевидно, что так как количество различных столбцов высоты s из нулей и единиц равно 2^s, то в силу принципа Дирихле $l \ge 6$ (в таблице M, размеры которой $s \times 54$, где $s \le 5$, точно будут равные столбцы). Более того, если какой-то столбец изменился при переходе от таблицы M к таблице M', то его номер — какое-то i_t из условия задачи. Впрочем, если среди равных столбцов в M' имеется столбец, не изменившийся при переходе от M к M', то неясно, является ли его номер величиной i_t из условия задачи или нет.

Для получения верхней оценки в дальнейшем решении мы будем рассматривать случай, когда длина каждого сообщения равна не 54, а 64 (ясно, что если за 6 сообщений удастся определить k, i_1, i_2, $\ldots$, i_k при $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 64$, то это тем более удастся сделать при $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 54$). Поскольку $2^6 = 64$, таблица M размерами 6×64 из нулей и единиц с попарно различными столбцами существует и притом единственна с точностью до перестановок столбцов. Ясно также, что при выбрасывании из этой таблицы произвольной строки (например, последней) в полученной таблице $\hat{M}$ каждый столбец будет встречаться дважды. Будем считать, что сначала передавались сообщения, являвшиеся подряд идущими строками из $\hat{M}$. Пусть $\hat{M}'$ — таблица, строки которой есть сообщения, полученные при передаче строк $\hat{M}$ (в том же порядке).

Если при переходе от $\hat{M}$ к $\hat{M}'$ некоторые слолбцы (а именно, столбцы с номерами r_1, $\ldots$, r_p) изменились, то соответствующие им позиции точно неисправны. Если в $\hat{M}'$ имеются равные этим столбцы, которые не изменились при переходе от $\hat{M}$ к $\hat{M}'$ (пусть их номера $r_{p+1}, \ldots, r_{p+w}$, где $1 \leq w \leq 2$), то для того, чтобы выяснить, какие же именно позиции среди позиций этих столбцы неисправны, нужно в последнем (шестом) сообщении в позициях $r_1, \ldots, r_p$ подать нули, а в позициях $r_{p+1}, \ldots, r_{p+w}$ — единицы (в неисправных среди позиций $r_{p+1}, \ldots, r_{p+w}$ позициях в полученном сообщении окажутся нули, а в исправных останутся единицы).

Если же при переходе от $\hat{M}$ к $\hat{M}'$ никакие столбцы не изменились, то неисправности либо нет, либо она представляет собой минимум позиций каких-то двух столбцов, которые равны в $\hat{M}$. Но в этом случае достаточно в последнем (шестом) сообщении в каждой паре позиций, соответствующих равным столбцам из $\hat{M}$, подать различные значения. Если неисправности нет, то полученное шестым сообщение совпадет с отправленным, а если есть, то на обеих неисправных позициях (соответствующих каким-то равным столбцам из $\hat{M}$) в полученном шестом сообщении окажутся нули.

Неправильные сообщения

Шрек, как обычно, посылал на сотовый телефон Фионе состоящие из нулей и единиц сообщения длиной 129 символов, когда увидел, что Румпельштильцхен забрался на вышку сотовой связи и что-то там закоротил. Это неминуемо приведет к тому, что во всех последующих сообщениях Шрека для некоторого k ($2 \leq k \leq 129$) и для некоторых $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 129$) вместо каждой из цифр, исходно стоявших в позициях i_1, i_2, $\ldots$, i_k, будет передаваться минимум из этих цифр. Залезть на вышку Шрек не может, так как справедливо опасается, что вышка от этого упадет. За какое минимальное количество сообщений Шрек и Фиона, собравшись вместе, смогут гарантированнно определить k, а также $i_1, i_2, \ldots, i_k$?

Ответ: 8.

Решение. Пусть l есть минимальное число сообщений. Пусть M — таблица, полученная при выписывании всех посланных сообщений одно под другим, а M' — таблица, полученная при выписывании всех полученных сообщений одно под другим (в том же порядке, что и в M). Заметим: если в таблице M имеются равные столбцы с номерами j_1, j_2, $\ldots$, j_k, то заведомо не обнаружится неисправность, при которой для всех t от 1 до k имеет место равенство $i_t = j_t$, так как всякое отправленное сообщение будет равно полученному. А если все столбцы в M попарно различны, то всякая неисправность обнаружится, так как при неисправности появляются равные столбцы. Очевидно, что так как количество различных столбцов высоты s из нулей и единиц равно 2^s, то в силу принципа Дирихле $l \geq 8$ (в таблице M, размеры которой $s \times 129$, где $s \leq 7$, точно будут равные столбцы). Более того, если какой-то столбец изменился при переходе от таблицы M к таблице M', то его номер — какое-то i_t из условия задачи. Впрочем, если среди равных столбцов в M' имеется столбец, не изменившийся при переходе от M к M', то неясно, является ли его номер величиной i_t из условия задачи или нет.

Для получения верхней оценки в дальнейшем решении мы будем рассматривать случай, когда длина каждого сообщения равна не 129, а 256 (ясно, что если за 8 сообщений удастся определить k, $i_1, i_2, \ldots, i_k$ при $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 256$, то это тем более удастся сделать при $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 128$). Поскольку $2^8 = 256$, таблица M размерами 8×256 из нулей и единиц с попарно различными столбцами существует и притом единственна с точностью до перестановок столбцов. Ясно также, что при выбрасывании из этой таблицы произвольной строки (например, последней) в полученной таблице $\hat{M}$ каждый столбец будет встречаться дважды. Будем считать, что сначала передавались сообщения, являвшиеся подряд идущими строками из $\hat{M}$. Пусть $\hat{M}'$ — таблица, строки которой есть сообщения, полученные при передаче строк $\hat{M}$ (в том же порядке).

Если при переходе от $\hat{M}$ к $\hat{M}'$ некоторые слолбцы (а именно, столбцы с номерами r_1, …, r_p) изменились, то соответствующие им позиции точно неисправны. Если в $\hat{M}'$ имеются равные этим столбцы, которые не изменились при переходе от $\hat{M}$ к $\hat{M}'$ (пусть их номера r_{p+1}, …, r_{p+w}, где $1 \le w \le 2$), то для того, чтобы выяснить, какие же именно позиции среди позиций этих столбцы неисправны, нужно в последнем (восьмом) сообщении в позициях r_1, …, r_p подать нули, а в позициях r_{p+1}, …, r_{p+w} — единицы (в неисправных среди позиций r_{p+1}, …, r_{p+w} позициях в полученном сообщении окажутся нули, а в исправных останутся единицы).

Если же при переходе от $\hat{M}$ к $\hat{M}'$ никакие столбцы не изменились, то неисправности либо нет, либо она представляет собой минимум позиций каких-то двух столбцов, которые равны в $\hat{M}$. Но в этом случае достаточно в последнем (восьмом) сообщении в каждой паре позиций, соответствующих равным столбцам из $\hat{M}$, подать различные значения. Если неисправности нет, то полученное восьмым сообщение совпадет с отправленным, а если есть, то на обеих неисправных позициях (соответствующих каким-то равным столбцам из $\hat{M}$) в полученном восьмом сообщении окажутся нули.

Неправильные сообщения

Шрек, как обычно, посылал на сотовый телефон Фионе состоящие из нулей и единиц сообщения длиной 74 символа, когда увидел, что Румпельштильцхен забрался на вышку сотовой связи и что-то там закоротил. Это неминуемо приведет к тому, что во всех последующих сообщениях Шрека для некоторого k $(2 \le k \le 74)$ и для некоторых i_1, i_2, …, i_k $(1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 74)$ вместо каждой из цифр, исходно стоявших в позициях i_1, i_2, …, i_k, будет передаваться минимум из этих цифр. Залезть на вышку Шрек не может, так как справедливо опасается, что вышка от этого упадет. За какое минимальное количество сообщений Шрек и Фиона, собравшись вместе, смогут гарантированнно определить k, а также i_1, i_2, …, i_k?

Ответ: 7.

Решение. Пусть l есть минимальное число сообщений. Пусть M — таблица, полученная при выписывании всех посланных сообщений одно под другим, а M' — таблица, полученная при выписывании всех полученных сообщений одно под другим (в том же порядке, что и в M). Заметим: если в таблице M имеются равные столбцы с номерами j_1, j_2, …, j_k, то заведомо не обнаружится неисправность, при которой для всех t от 1 до k имеет место равенство $i_t = j_t$, так как всякое отправленное сообщение будет равно полученному. А если все столбцы в M попарно различны, то всякая неисправность обнаружится, так как при неисправности появляются равные столбцы. Очевидно, что так как количество различных столбцов высоты s из нулей и единиц равно 2^s, то в силу принципа Дирихле $l \ge 7$ (в таблице M, размеры которой $s \times 74$, где $s \le 6$, точно будут равные столбцы). Более того, если какой-то столбец изменился при переходе от таблицы M к таблице M', то его номер — какое-то i_t из условия задачи. Впрочем, если среди равных столбцов в M' имеется столбец, не изменившийся при переходе от M к M', то неясно, является ли его номер величиной i_t из условия задачи или нет.

Для получения верхней оценки в дальнейшем решении мы будем рассматривать случай, когда длина каждого сообщения равна не 74, а 128 (ясно, что если за 7 сообщений удастся определить k, i_1, i_2, $\ldots$, i_k при $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 128$, то это тем более удастся сделать при $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 74$). Поскольку $2^7 = 128$, таблица M размерами 7×128 из нулей и единиц с попарно различными столбцами существует и притом единственна с точностью до перестановок столбцов. Ясно также, что при выбрасывании из этой таблицы произвольной строки (например, последней) в полученной таблице $\hat{M}$ каждый столбец будет встречаться дважды. Будем считать, что сначала передавались сообщения, являвшиеся подряд идущими строками из $\hat{M}$. Пусть $\hat{M}'$ — таблица, строки которой есть сообщения, полученные при передаче строк $\hat{M}$ (в том же порядке).

Если при переходе от $\hat{M}$ к $\hat{M}'$ некоторые слолбцы (а именно, столбцы с номерами r_1, $\ldots$, r_p) изменились, то соответствующие им позиции точно неисправны. Если в $\hat{M}'$ имеются равные этим столбцы, которые не изменились при переходе от $\hat{M}$ к $\hat{M}'$ (пусть их номера r_{p+1}, $\ldots$, r_{p+w}, где $1 \le w \le 2$), то для того, чтобы выяснить, какие же именно позиции среди позиций этих столбцы неисправны, нужно в последнем (седьмом) сообщении в позициях r_1, $\ldots$, r_p подать нули, а в позициях r_{p+1}, $\ldots$, r_{p+w} — единицы (в неисправных среди позиций r_{p+1}, $\ldots$, r_{p+w} позициях в полученном сообщении окажутся нули, а в исправных останутся единицы).

Если же при переходе от $\hat{M}$ к $\hat{M}'$ никакие столбцы не изменились, то неисправности либо нет, либо она представляет собой минимум позиций каких-то двух столбцов, которые равны в $\hat{M}$. Но в этом случае достаточно в последнем (седьмом) сообщении в каждой паре позиций, соответствующих равным столбцам из $\hat{M}$, подать различные значения. Если неисправности нет, то полученное седьмым сообщение совпадет с отправленным, а если есть, то на обеих неисправных позициях (соответствующих каким-то равным столбцам из $\hat{M}$) в полученном седьмом сообщении окажутся нули.