

**Олимпиада школьников по прикладной математике и информатике  
факультета вычислительной математики и кибернетики  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова  
Очный тур (14 апреля 2018 года), 8-9 классы**

**Задачи по математике**

**1. Равные произведения-1**

Сегодня **14.04.2018**. Интересно, что произведение ненулевых цифр числа и месяца равно произведению ненулевых цифр года:  $1 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 1 \cdot 8$ . Назовём такие дни «сбалансированными». Когда был самый первый и когда будет самый последний сбалансированные дни в этом календарном году?

**2. Помогите Тюбику!**

Художнику Тюбику не хватает красок. Помогите ему раскрасить натуральные числа в наименьшее число цветов так, чтобы любые два числа, которые отличаются на 2018 или в 5 раз, были раскрашены в разные цвета. Сколько красок понадобится? Ответ обосновать.

**3. Цилиндрические шахматы-1**

Левый и правый края шахматной доски  $8 \times 8$  склеили. Какое наибольшее (суммарное) количество шахматных ладей и шахматных коней можно расставить в клетках полученной цилиндрической доски так, чтобы ладьи не били друг друга, и кони тоже не били друг друга? Ответ обосновать.

**4. Просто уравнение**

Известно, что 1009 – простое число. Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 y^2 + x^2 - 15y^2 = 2033.$$

**5. 12 друзей Оушена**

Рыцари всегда говорят только правду, Лжецы всегда лгут. На острове Рыцарей и Лжецов каждый имеет ровно 12 друзей. Каждый житель острова однажды заявил, что среди его друзей Лжецов не меньше, чем Рыцарей. Может ли число Рыцарей быть в полтора раза больше числа Лжецов? Ответ обосновать.

**Олимпиада школьников по прикладной математике и информатике  
факультета вычислительной математики и кибернетики  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова  
Очный тур (14 апреля 2018 года), 10 класс**

**Задачи по математике**

**1. Равные произведения–2**

Сегодня **14.04.2018**. Интересно, что произведение ненулевых цифр числа и месяца равно произведению ненулевых цифр года:  $1 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 1 \cdot 8$ . Назовём такие дни «сбалансированными». Сколько сбалансированных дней в этом календарном году?

**2. «Под градусом»**

Указать хотя бы одно значение угла  $\alpha$  (в градусах), при котором числа

$$1 + 4 \sin 2\alpha, 4 \cos \alpha, \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

**3. Цилиндрические шахматы–2**

Имеется неограниченный запас шахматных коней и шахматных слонов. Другие фигуры потерялись. Верхний и нижний края шахматной доски **8x8** склеили. Можно ли расставить в клетках полученной цилиндрической доски: **а) 40; б) 48** шахматных фигур так, чтобы кони не били друг друга, и слоны не били друг друга? Ответ обосновать.

**4. Граф на службе у Царя**

В некотором царстве, в некотором государстве было у Царя... полдюжины городов и одна беда – дороги. Точнее, полное отсутствие дорог. Однажды приказал Царь построить между городами дороги из красного кирпича, да так, чтобы эти дороги нигде не пересекались. Какое наибольшее число дорог смогут проложить царские строители (считаем, что многоуровневые развязки в то время строить не умели, а из целей экономии кирпича каждые два города соединяются напрямую не более чем одной дорогой)? Ответ обосновать.

Указание. В решении разрешается использовать (без доказательства) то, что граф  $K_5$  не является планарным. Другими словами, если пять городов соединить попарно дорогами, то они обязательно пересекутся.

**5. ВМК = МГУ**

Из точки  $U$  проведён перпендикуляр  $UA$  на прямую, содержащую медиану  $GK$  треугольника  $BGU$  ( $A$  лежит между точками  $G$  и  $K$ ). На отрезке  $GK$  отметили точку  $M$  так, что  $GM = 2AK$ . Доказать равенство углов  $\angle BМК$  и  $\angle MГУ$ .

Олимпиада школьников по прикладной математике и информатике  
факультета вычислительной математики и кибернетики  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова  
Очный тур (14 апреля 2018 года), 8-9 классы

**Задачи на программирование**

**1. О связи математики и информатики-1**

Написать программу, которая определяет количество «сбалансированных» дней в заданном году (см. задачу по математике «Равные произведения»).

**Ввод:** одно число – год в формате **yyyy** (в диапазоне от **0001** до **9999**),

**Вывод:** одно число – количество дат в **yyyy** году в формате **dd.mm.yyyy** (в диапазоне от **01.01.yyyy** до **31.12.yyyy**), каждая из которых представляет сбалансированный день.

**Примеры:**

Ввод: 2000

Вывод: 18

Ввод: 1999

Вывод: 0

**2. Циклический сдвиг, или экономика должна быть экономной**

Написать программу, которая выполняет циклический сдвиг значений элементов целочисленного массива из трёх элементов влево (на одну позицию). Использовать вспомогательные переменные не разрешается. Можно использовать только операторы присваивания, причём и их необходимо экономить. Максимальный балл за задачу ставится в случае, если программа работает правильно, количество используемых присваиваний минимально, и минимальность Вами обоснована.

**Пример:**

**Массив до обработки:**

A[1] = 25, A[2] = 12, A[3] = -10

**Массив после обработки:**

A[1] = 12, A[2] = -10, A[3] = 25

**3. Выбрать правильное направление**

Выпуклый **N**-угольник разбит несколькими диагоналями на треугольники. Вершины последовательно занумерованы числами от 1 до **N**.

Написать программу, которая для каждого отрезка (для всех сторон и диагоналей) выбирает направление таким образом, чтобы для каждого треугольника сумма всех соответствующих векторов не равнялась нулю (т.е., чтобы не было ориентированных циклов длины 3).

**Ввод:** В первой строке – число **N** (от 4 до 1000). Далее в каждой из следующих **N-3** строк записана пара чисел (номера вершин – концов соответствующей диагонали).

**Вывод:** **2N-3** строк, в каждой из которых записана пара чисел (номера вершин – концов соответствующего отрезка). Направление выбирается от первой вершины пары ко второй. Требуется привести любой выбор направлений, удовлетворяющий условию.

**Пример:**

Ввод:

4

2 4

Вывод:

1 2

2 3

4 1

4 2

4 3

Олимпиада школьников по прикладной математике и информатике  
факультета вычислительной математики и кибернетики  
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова  
Очный тур (14 апреля 2018 года), 10 классы

**Задачи на программирование**

**1. О связи математики и информатики-2**

Написать программу, которая определяет количество «сбалансированных» дней (см. задачу по математике «Равные произведения») в заданном столетии.

**Ввод:** число в формате **yy** (в диапазоне от **01** до **99**), на 1 меньше, чем номер **S** столетия. Например, для 20-го столетия вводится число 19.

**Вывод:** одно число – количество дат в **S-м** столетии в формате **dd.mm.yyyy** (в диапазоне от **01.01.yy00** до **31.12.yy99**), каждая из которых представляет сбалансированный день.

**2. «Сколько вешать в граммах?»**

В продуктовом магазине имеется набор гирь массой  $3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^{20}$  граммов (каждая гиря в одном экземпляре) и двухчашечные весы. Будем считать, что эти гири занумерованы числами  $0, 1, 2, \dots, 20$ , соответственно. Покупатель хочет купить муки.

Написать программу, которая

– вводит массу **X** муки в граммах (целое число в диапазоне от 1 до  $(3^{21}-1)/2$ ), которую хочет купить клиент магазина,

– выводит две строки целых чисел в диапазоне от 0 до 20 – номера гирь в порядке убывания, которые надо положить на левую и правую чаши весов, соответственно, чтобы весы приходили в равновесие, когда на правую чашу весов насыпано **X** г муки.

**Пример 1:**

**Ввод:** 19

**Вывод:**

3 0  
2

**Пример 2:**

**Ввод:** 293

**Вывод:**

5 4  
3 1 0

**3. Циклический сдвиг, или экономика должна быть экономной**

Написать программу, которая выполняет циклический сдвиг значений элементов целочисленного массива из четырёх элементов влево (на одну позицию). Использовать вспомогательные переменные не разрешается. Можно использовать только операторы присваивания, причём и их необходимо экономить. Максимальный балл за задачу ставится в случае, если программа работает правильно, количество используемых присваиваний минимально, и минимальность Вами обоснована.

**Пример:**

**Массив до обработки:**     **A[1] = -53, A[2] = 10, A[3] = 0, A[4] = 8**

**Массив после обработки:** **A[1] = 10, A[2] = 0, A[3] = 8, A[4] = -53**