Олимпиада школьников по прикладной математике и информатике
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
Очный тур (14 апреля 2018 года), 8-9 классы

Задачи по математике (краткие решения)

1. Равные произведения-1

Сегодня **14.04.2018.** Интересно, что произведение ненулевых цифр числа и месяца равно произведению ненулевых цифр года: $1\cdot4\cdot4=2\cdot1\cdot8$. Назовём такие дни «сбалансированными». Когда был самый первый и когда будет самый последний сбалансированные дни в этом календарном году?

Ответ. Самый первый сбалансированный день в этом (2018) году был **28.01.2018**, самый последний будет **24.12.2018.**

2. Помогите Тюбику!

Художнику Тюбику не хватает красок. Помогите ему раскрасить натуральные числа в наименьшее число цветов так, чтобы любые два числа, которые отличаются на 2018 или в 5 раз, были раскрашены в разные цвета. Сколько красок понадобится? Ответ обосновать.

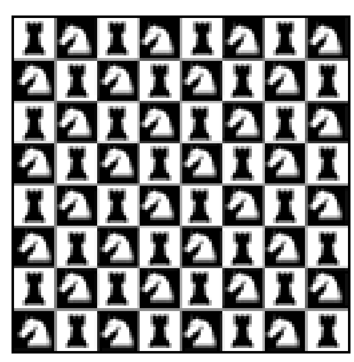
Ответ. Понадобится 3 краски.

Решение. С одной стороны, натуральные числа, равные 1009, $3\cdot1009$ и $5\cdot1009$, должны быть иметь попарно различные цвета (первое от второго и второе от третьего отличаются на 2018, а первое от третьего – в пять раз). Поэтому понадобится не меньше трёх цветов. С другой стороны, трёх цветов будет достаточно, поскольку, раскрашивая числа 1, 2, 3, … друг за другом, мы для очередного числа ***n*** всегда сможем выбрать цвет, не совпадающий ни с цветом числа ***n-2018***, ни с цветом числа ***n/5*** (у нас всего три цвета, и из них не более двух запретных).

Замечание. Задача легко формулируется на языке теории графов: **«Вершинам (бесконечного!) графа приписаны натуральные числа, рёбра между вершинами проводятся в том и только в том случае, если числа, которые им приписаны, отличаются на 2018 или в 5 раз. Требуется раскрасить вершины графа в минимальное число цветов так, чтобы любые смежные вершины имели разные цвета»**. В этом смысле отсутствие правильной раскраски в два цвета вытекает из наличия в графе цикла нечётной длины (треугольника – в авторском решении, или пятиугольника $2018,\ 2\cdot2018,\ 3\cdot2018,\ 4\cdot2018,\ 5\cdot2018$ – в решениях школьников 9 класса Грачёва Кирилла, Донского Станислава, Викторова Антона и Климова Артёма).

3. Цилиндрические шахматы-1

Левый и правый края шахматной доски 8×8 склеили. Какое наибольшее (суммарное) количество шахматных ладей и шахматных коней можно расставить в клетках полученной цилиндрической доски так, чтобы ладьи не били друг друга, и кони тоже не били друг друга? Ответ обосновать.



Ответ. 64.

Решение. Очевидно, больше, чем 64 фигуры, расставить нельзя (на доске 64 поля). Пример расстановки фигур, удовлетворяющей условию, можно получить, если расставить 32 коней на клетки чёрного цвета и 32 ладьи – на клетки белого цвета (см. рисунок). Легко видеть, что пример остаётся верным, если склеить левый и правый края шахматной доски.

Замечания:

1. Обоснованием правильности примера (которое здесь не требовалось) может служить тот факт, что шахматный конь бьёт только поля противоположного цвета, а ладьям бить друг друга мешают стоящие между ними кони.

2. Известно, что на шахматной доске (обычной или цилиндрической) можно расставить максимум 8 ладей и максимум 32 коней (чтобы они не били друг друга). А если расставлять и тех, и других (так, чтобы ладьи не били ладей, а кони не били коней), то получится расставить 64 фигуры, и 64 > 8 + 32.

3. Как справедливо отметили многие решившие задачу школьники, задача легко обобщается на доску $n\times n$ при четном n, с ответом n^2, даже если дополнительно склеить верхний и нижний края доски (получится «тороидальная» доска). Какой ответ будет при нечётном n, авторы не знают.

4. Просто уравнение

Известно, что 1009 – простое число. Решите уравнение в целых числах:

$$x^2y^2+x^2-15y^2=2033.$$

Ответ. (±32;1), (±32;-1).

Решение. Уравнение легко приводится к виду $(x^2-15)(y^2+1)=2018.$ В левой части равенства стоит произведение целых чисел, в правой – число 2018, которое, как подсказано в условии задачи, раскладывается в произведение простых чисел как $2\cdot 1009.$ Значит, число (y^2+1) является натуральным делителем числа 2018, то есть принадлежит множеству $\{1;2;1009;2018\}.$ Перебирая эти четыре случая, приходим к ответу.

5. 12 друзей Оушена

Рыцари всегда говорят только правду, Лжецы всегда лгут. На острове Рыцарей и Лжецов каждый имеет ровно 12 друзей. Каждый житель острова однажды заявил, что среди его друзей Лжецов не меньше, чем Рыцарей. Может ли число Рыцарей быть в полтора раза больше числа Лжецов? Ответ обосновать.

Ответ. Да, может.

Решение Василенко Егора, 9 класс. Приведём пример. Пусть на острове 8 Лжецов и 12 Рыцарей (заметим, что Рыцарей в полтора раза больше, чем Лжецов). Пусть каждый Лжец дружит только со всеми 12 Рыцарями (и тогда он лжёт). У каждого Рыцаря среди друзей уже имеется 8 Лжецов. Ещё 4 друзей среди Рыцарей можно подобрать так, как показано на рисунке (граф дружбы получается «наложением» цикла длины 12 и двух циклов длины 6). Очевидно, все Рыцари говорят правду. Все условия задачи выполнены.

Замечание. Минимальный (по числу жителей острова) пример строится для 6 Лжецов и 9 Рыцарей. Школьниками получены и другие примеры, решающие задачу. Интересно было бы найти наименьшую и наибольшую долю Рыцарей на острове (в условиях задачи).

Олимпиада школьников по прикладной математике и информатике факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова Очный тур (14 апреля 2018 года), 10 класс

Задачи по математике (краткие решения)

1. Равные произведения-2

Сегодня **14.04.2018.** Интересно, что произведение ненулевых цифр числа и месяца равно произведению ненулевых цифр года: $1\cdot 4\cdot 4 = 2\cdot 1\cdot 8.$ Назовём такие дни «сбалансированными». Сколько сбалансированных дней в этом календарном году?

Ответ. 16.

Решение. Поскольку произведению ненулевых цифр года в 2018 году равно 16, а 16 делится только на степени «двойки», то «сбалансированные» дни могут быть только в месяцы, номера которых имеют только цифры 0, 1, 2, 4 или 8. В 01, 10 и 11 месяцах по одному такому дню (28 число), в 02 и 12 месяце – по три таких дня (08, 18 и 24 числа), в 04 месяце также три таких дня (04, 14 и 22 числа) и, наконец, в 08 месяце имеется четыре нужных дня (02, 12, 20 и 21 числа). Итак, всего в этом году 16 «сбалансированных» дней.

2. «Под градусом»

Указать хотя бы одно значение угла α (в градусах), при котором числа

$$1+4\sin 2\alpha\ ,\ 4\cos\alpha\ ,\ \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

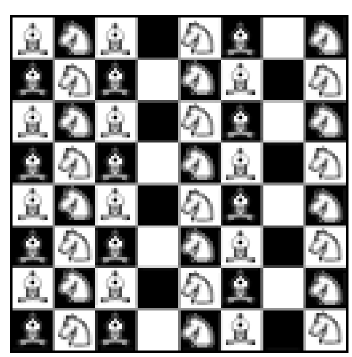
Ответ. 7,5°. Возможны и другие варианты ответа.

Решение. Легко проверить, что при α = 7,5° справедлива цепочка равенств $1 = 2\sin 4\alpha = 4\cos 2\alpha\sin 2\alpha = 4(2\cos^2\alpha - 1)\sin 2\alpha$, откуда, раскрыв скобки, получим $8\cos^2\alpha\sin 2\alpha = 1+4\sin 2\alpha$. Учитывая, что при заданном α все значения тригонометрических функций положительны, имеем $(4\cos\alpha)^2 = (1+4\sin 2\alpha)\cdot\frac{2}{\sin 2\alpha}$.

Это означает, что числа $1+4\sin 2\alpha$, $4\cos\alpha$ и $\frac{2}{\sin 2\alpha}$ образуют геометрическую прогрессию.

3. Цилиндрические шахматы-2

Имеется неограниченный запас шахматных коней и шахматных слонов. Другие фигуры потерялись. Верхний и нижний края шахматной доски **8x8** склеили. Можно ли расставить в клетках полученной цилиндрической доски: **а) 40; б) 48** шахматных фигур так, чтобы кони не били друг друга, и слоны не били друг друга? Ответ обосновать.



Ответ. а) можно, **б)** можно.

Решение. Очевидно, достаточно указать пример, решающий пункт **б)** (см. рисунок, верхний и нижний края доски склеены). Примеры, решающие пункт **а)**, найти проще – их гораздо больше.

Замечания:

1. Можно ли расставить больше 48 фигур (в условиях задачи) и какой будет максимум, авторам не известно.
2. Интересно, что на шахматной доске (обычной или цилиндрической) можно расставить максимум 32 коней (чтобы они не били друг друга). Слонов же на обычной доске можно расставить максимум 14, а на цилиндрической – только 8 (найдите во всех четырёх случаях соответствующие примеры!) А если расставлять и тех, и других (так, чтобы слоны не били слонов, а кони не били коней), то получится расставить (и на обычной, и на цилиндрической доске), как видим, не менее 48 фигур, и 48 > 32+14.

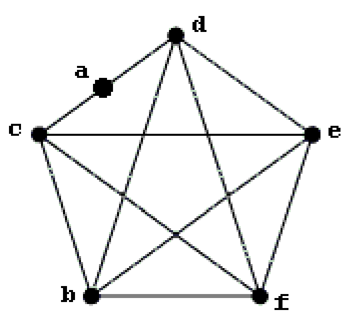
4. Граф на службе у Царя

В некотором царстве, в некотором государстве было у Царя… полдюжины городов и одна беда – дороги. Точнее, полное отсутствие дорог. Однажды приказал Царь построить между городами дороги из красного кирпича, да так, чтобы эти дороги нигде не пересекались. Какое наибольшее число дорог смогут проложить царские строители (считаем, что многоуровневые развязки в то время строить не умели, а из целей экономии кирпича каждые два города соединяются напрямую не более чем одной дорогой)? Ответ обосновать.

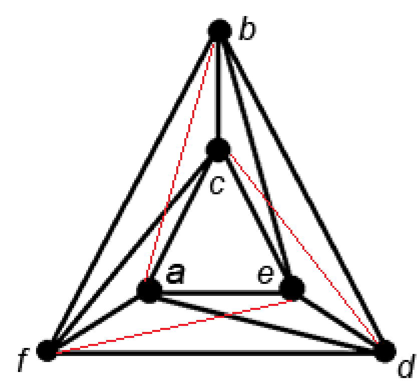
Указание. В решении разрешается использовать (без доказательства) то, что граф K_5 не является планарным. Другими словами, если пять городов соединить попарно дорогами, то они обязательно пересекутся.

Ответ. 12 дорог.

Решение. Граф K_6 (в котором, кстати, 15 рёбер) не планарен, поскольку содержит не планарный подграф K_5. Сформулируем задачу по-другому: «Какое наименьшее число рёбер необходимо удалить из графа K_6, чтобы получить планарный граф?» Очевидно, если удалить одно ребро *(a,b)* или два смежных ребра *(a,b)* и *(a,c)*, непланарность сохранится (можно выделить подграф K_5 на всех вершинах, кроме *a*. Если же удалить два не смежных ребра *(a,b)* и *(c,d)*, то, обозначив через *e* и *f* оставшиеся две вершины, получим, что в подграфе на 5 вершинах *b,c,d,e,f* проведены все возможные рёбра, кроме ребра *(c,d)*. В этом случае путь из вершины *c* в вершину *d* можно провести, взяв рёбра *(c,a)* и *(a,d)*, как показано на рисунке слева. В итоге построен подграф, который, по сути, есть граф K_5 с дополнительной «проходящей» вершиной на одном ребре. Ясно, что он так же не планарен, как и K_5. Итак, удаление двух рёбер тоже не помогает. С другой стороны, при удалении трёх рёбер (например, попарно не смежных рёбер *(a,b)*, *(c,d)* и *(e,f)*) можно получить планарный граф (см. рисунок справа). Значит, в ответ пишем количество оставшихся дорог 15 – 3 = 12.



граф K_5 с проходящей вершиной



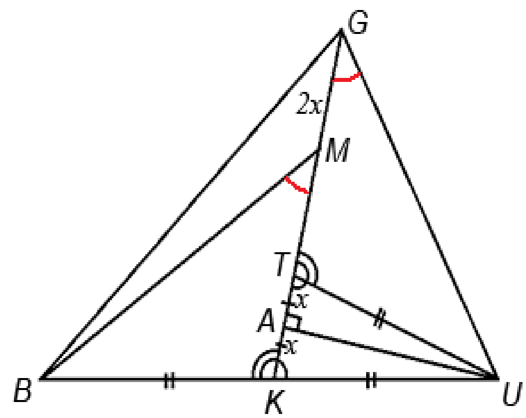
Для знатоков. Другой способ решения задачи опирается на то, что среди всех планарных графов наибольшее число рёбер имеет «триангуляция» – связный планарный граф, у каждой плоской реализации которого каждая грань, включая внешнюю, ограничена циклом длины 3 (просто иначе в той грани, которая является *n*-угольником, n ≥ 4, можно провести диагональ и увеличить число рёбер). Остаётся применить теорему Эйлера или доказать по индукции, что в любая триангуляция на *p* вершинах имеет ровно *3p-6* рёбер.

5. BMK = MГУ

Из точки U проведён перпендикуляр UA на прямую, содержащую медиану GK треугольника BGU (A лежит между точками G и K). На отрезке GK отметили точку M так, что GM = 2AK. Доказать равенство углов BMK и MGU.

Решение Аршиновой Ксении, 10 класс. Отложим на прямой AK вне отрезка AK точку T так, что AT = AK (см. рисунок). Несложно убедиться, что, при любом взаимном расположении точек на прямой AK выполнено равенство KM = TG. Далее, треугольник KTU равнобедренный, поскольку в нём высота является медианой. GK тоже медиана (по условию). Значит, BK = KU = UT. Наконец, ∠BKM = 180°-∠UKT = 180°-∠UTK = ∠UTG (использованы теоремы о сумме смежных углов и о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника).

В итоге △BMK = △UGT по двум сторонам и углу между ними. Откуда следует, что ∠BMK = ∠MGU, что и требовалось доказать.



Замечание. Ещё одно (идейно похожее) решение получается, если отложить отрезок, равный AK, от точки K на продолжении медианы GK.

Олимпиада школьников по прикладной математике и информатике
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
Очный тур (14 апреля 2018 года), 8-9 классы

Задачи на программирование (краткие решения)

1. О связи математики и информатики-1

Написать программу, которая определяет количество «сбалансированных» дней в заданном году (см. задачу по математике **«Равные произведения»**).

Ввод: одно число — год в формате **yyyy** (в диапазоне от **0001** до **9999**),
Вывод: одно число — количество дат в **yyyy** году в формате **dd.mm.yyyy** (в диапазоне от **01.01.yyyy** до **31.12.yyyy**), каждая из которых представляет сбалансированный день.

Примеры:

Ввод: 2000
Вывод: 18

Ввод: 1999
Вывод: 0

Решение. Поскольку в условии задачи требования на эффективность программы отсутствуют, принимались простые, чисто «переборные» решения (в которых, однако, нужно учитывать, что перемножаются только ненулевые цифры – цифры 0 при вычислении произведений можно либо пропускать, либо заменять на 1). Кроме того, необходимо было принимать в расчёт, что количество дней в месяце зависит от номера месяца и даже от номера года (определение високосного года во время Олимпиады было выписано на доске).

Более эффективные алгоритмы подсчёта «сбалансированных» дней в заданном году используют предварительное группирование месяцев (можно и дней) по произведению ненулевых цифр (например, в 01, 10 и 11 месяцах произведение ненулевых цифр одинаковое), а также разложения произведений на простые множители (см. решение задачи по математике **«Равные произведения-2»**)

2. Циклический сдвиг, или экономика должна быть экономной

Написать программу, которая выполняет циклический сдвиг значений элементов целочисленного массива из трёх элементов влево (на одну позицию). Использовать вспомогательные переменные не разрешается. Можно использовать только операторы присваивания, причём и их необходимо экономить. Максимальный балл за задачу ставится в случае, если программа работает правильно, количество используемых присваиваний минимально, и минимальность Вами обоснована.

Пример:

Массив до обработки:
A[1] = 25, A[2] = 12, A[3] = -10

Массив после обработки:
A[1] = 12, A[2] = -10, A[3] = 25

Решение. Каждым оператором присваивания мы можем поставить на нужное место не более одного числа (групповые операторы присваивания, как в языке **Python**, использовать не разрешалось!). Кроме того, первый оператор присваивания, очевидно, не может сразу присвоить элементу массива окончательное значение (в противном случае исходное значение этого элемента «потеряется» безвозвратно). Таким образом, для циклического сдвига массива длины 3 необходимо не менее 4 операторов присваивания. Вот пример фрагмента программы (на языке Pascal), где 4 операторов достаточно:

```
A[1] := A[1] + A[2] + A[3];
A[3] := A[1] - A[2] - A[3];
A[2] := A[1] - A[2] - A[3];
A[1] := A[1] - A[2] - A[3];
```

Пожалуйста, убедитесь сами, что в итоге в массиве произойдёт нужный циклический сдвиг значений элементов.

3. Выбрать правильное направление

Выпуклый **N**-угольник разбит несколькими диагоналями на треугольники. Вершины последовательно занумерованы числами от 1 до N.

Написать программу, которая для каждого отрезка (для всех сторон и диагоналей) выбирает направление таким образом, чтобы для каждого треугольника сумма всех соответствующих векторов не равнялась нулю (т.е., чтобы не было ориентированных циклов длины 3).

Ввод: В первой строке – число **N** (от 4 до 1000). Далее в каждой из следующих **N-3** строк записана пара чисел (номера вершин – концов соответствующей диагонали).

Вывод: **2N-3** строк, в каждой из которых записана пара чисел (номера вершин – концов соответствующего отрезка). Направление выбирается от первой вершины пары ко второй. Требуется привести любой выбор направлений, удовлетворяющий условию.

Пример:

Ввод:
4
2 4

Вывод:
1 2
2 3
4 1
4 2
4 3

Решение. Очевидно, если просто у каждого отрезка выбирать направление от вершины с меньшим номером к вершине с бóльшим номером, ориентированных циклов (в том числе и треугольников), не возникнет. Есть и другие алгоритмы решения задачи.

Олимпиада школьников по прикладной математике и информатике
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
Очный тур (14 апреля 2018 года), 10 классы

Задачи на программирование (краткие решения)

1. О связи математики и информатики-2

Написать программу, которая определяет количество «сбалансированных» дней (см. задачу по математике **«Равные произведения»**) в заданном столетии.

Ввод: число в формате **yy** (в диапазоне от **01** до **99**), на 1 меньшее, чем номер **S** столетия. Например, для 20-го столетия вводится число 19.
Вывод: одно число — количество дат в **S-м** столетии в формате **dd.mm.yyyy** (в диапазоне от **01.01.yy00** до **31.12.yy99**), каждая из которых представляет сбалансированный день.

Решение. Переборный алгоритм решения данной задачи отличается от алгоритма решения задачи **«О связи математики и информатики-1»** лишь вводом номера столетия вместо ввода номера года и наличием «внешнего» цикла по номерам лет от **yy00** до **yy99.** Все возможности по улучшению (= ускорению) этого перебора совершенно аналогичные. Поскольку в условии задачи нет требований на эффективность программы, за алгоритмы «тупого перебора», реализованные без ошибок, ставился максимальный балл.

2. «Сколько вешать в граммах?»

В продуктовом магазине имеется набор гирь массой $3^0, 3^1, 3^2, ..., 3^{20}$ граммов (каждая гиря в одном экземпляре) и двухчашечные весы. Будем считать, что эти гири занумерованы числами $0,1,2,...,20,$ соответственно. Покупатель хочет купить муки.

Написать программу, которая

— вводит массу **X** муки в граммах (целое число в диапазоне от 1 до $(3^{21}-1)/2$), которую хочет купить клиент магазина,

— выводит две строки целых чисел в диапазоне от 0 до 20 — номера гирь в порядке убывания, которые надо положить на левую и правую чаши весов, соответственно, чтобы весы приходили в равновесие, когда на правую чашу весов насыпано **X** г муки.

Пример 1:

Ввод: 19
Вывод:
3 0
2

Пример 2:

Ввод: 293
Вывод:
5 4
3 1 0

Решение.

I способ. Можно сначала перевести число **X** из десятичной системы счисления в троичную, а затем, в случае наличия «двоек» в полученном представлении, избавляться от них последовательно (справа налево!) по следующему правилу: $2*3^n = 3^{n+1} - 3^n$ (с переносом +1 в (n+1)-й разряд). В итоге получим разложение числа **X** по степеням тройки с коэффициентами ±1, по которому легко выписываются искомые две строки номеров гирь.

II способ. Есть алгоритм прямого перехода к нужному представлению числа **X.** Например, в работах школьников 10 класса Пластининой Валентины, Баринова Дениса и Сумаренко Егора совершенно разными средствами представлен один и тот же алгоритм, который мы запишем в виде фрагмента программы на языке Pascal (без раздела описаний, только основной блок):

```
begin
   Write ('X = '); ReadLn(X);

   y:= 0; i := 0; j := 0;

   while X>1 do begin
      if X mod 3 = 0 then begin
         Inc(y);
         X := X div 3;
      end
      else if (X+1) mod 3 = 0 then begin
         Inc(j);
         b[j] := y;
         Inc(y);
         X := (X+1) div 3;
      end
      else // (X-1) mod 3 = 0
      begin
         Inc(i);
         a[i] := y;
         Inc(y);
         X := (X-1) div 3;
      end
   end;
   Inc(i);
   a[i] := y;

   for n:=i downto 1 do
      Write(a[n], ' ');
   WriteLn;

   for n:=j downto 1 do
      Write(b[n], ' ');
   WriteLn;
end.
```

Утверждения о корректности алгоритмов (каждого из двух представленных здесь) можно доказывать с помощью метода математической индукции (хотя этого мы от школьников не требовали).

3. Циклический сдвиг, или экономика должна быть экономной

Написать программу, которая выполняет циклический сдвиг значений элементов целочисленного массива из четырёх элементов влево (на одну позицию). Использовать вспомогательные переменные не разрешается. Можно использовать только операторы присваивания, причём и их необходимо экономить. Максимальный балл за задачу ставится в случае, если программа работает правильно, количество используемых присваиваний минимально, и минимальность Вами обоснована.

Пример:

Массив до обработки: A[1] = -53, A[2] = 10, A[3] = 0, A[4] = 8

Массив после обработки: A[1] = 10, A[2] = 0, A[3] = 8, A[4] = -53

Решение. Каждым оператором присваивания мы можем поставить на нужное место не более одного числа (групповые операторы присваивания, как в языке **Python**, использовать не допускались!). Кроме того, первый оператор присваивания, очевидно, не может сразу присвоить элементу массива окончательное значение (в противном случае исходное значение этого элемента «потеряется» безвозвратно). Таким образом, для циклического сдвига массива длины 4 необходимо не менее 5 операторов присваивания. Вот пример фрагмента программы (на языке Pascal), где 5 операторов достаточно:

```
A[1] := A[1] + A[2] + A[3] + A[4];
A[4] := A[1] - A[2] - A[3] - A[4];
A[3] := A[1] - A[2] - A[3] - A[4];
A[2] := A[1] - A[2] - A[3] - A[4];
A[1] := A[1] - A[2] - A[3] - A[4];
```

Пожалуйста, убедитесь сами, что в итоге в массиве произойдёт нужный циклический сдвиг значений элементов.

Замечание. Можно обобщить данный алгоритм на случай циклического сдвига элементов массива любой наперёд заданной длины $n \geq 2$. Сделайте это и докажите корректность алгоритма (например, индукцией по параметру n).

Друзья!

Выражаем Вам благодарность за участие в нашей Олимпиаде. Надеемся, что Вам понравились задачи. Если Вы в этот раз не вошли в число призёров – не расстраивайтесь. Обязательно попробуйте свои силы в следующем году!

Подробности ищите на сайте Олимпиады факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова по прикладной математике и информатике для школьников 8-10 классов http://olympiad.cs.msu.ru/

Свои замечания и пожелания отправляйте, пожалуйста, Оргкомитету Олимпиады на наш электронный адрес olympiad@cs.msu.ru. Туда же можно писать о всех замеченных опечатках, а также присылать решения поставленных здесь задач.

Желаем Вам удачи!